



TITLE:

# Fisher and Kullback-Leibler informations contained in record data (Interval Estimation and Its Related Topics)

AUTHOR(S):

山本, 泰志; 赤平, 昌文

---

CITATION:

山本, 泰志 ...[et al]. Fisher and Kullback-Leibler informations contained in record data (Interval Estimation and Its Related Topics). 数理解析研究所講究録 2004, 1380: 1-32

ISSUE DATE:

2004-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/25659>

RIGHT:

# Fisher and Kullback-Leibler informations contained in record data

筑波大・理工 山本 泰志 (Taishi Yamamoto)  
筑波大・数学 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

## 1 はじめに

一般に, ある母数を持つ母集団分布から得られた無作為標本に基づく統計量を考え, そこに含まれるその母数に関する情報量を考えることは, その統計量の良さを知る上で非常に有用である. たとえば, 十分統計量は情報無損失であるという特徴付けを行うことができる. 最近, 独立に同一の連続型分布に従う確率変数から得られる記録値と記録時刻に含まれる情報量を調べることに盛んに行われている. たとえば, 母集団分布からの大きさ  $n$  の無作為標本に含まれる情報量と  $n$  個の記録値に含まれる情報量の比較が行われている (Ahmadi and Arghami [AhAr01], [AhAr03]). また, 記録値の予測問題についても論じられている ([ArnBN98], [AwR00], [HiAk02]).

本論では, 第3節において, [AhAr01] に従って,  $n$  個の記録値のもつ Fisher 情報量と独立同分布に従う  $n$  個の確率変数のもつ Fisher 情報量の比較を行う. そして第4節において, Hofmann and Nagaraja [HoN03] に従って, 連続型分布から得られた無作為標本に基づく上位 (下位) の記録値, 記録時刻, 最大 (最小) の記録値のもつ Fisher 情報量について論じる. その上で, 第4.2節において, [HoN03] では論じられていないガンマ分布  $G(\alpha, 1/\beta)$  の場合に, 実際に Fisher 情報量の値を数値的に求める. 第5節において, 2つの分布間の違いを評価できる Kullback-Leibler 情報量を用いて, 記録値を含む情報量についても論じる ([YA03]). さらに, 第6節において, 実際に降水量データに基づいて記録値のもつ情報量についても検討する.

## 2 設定

確率変数  $X$  の (ルベグ測度に関する) 確率密度関数 (p.d.f.) を  $f(x, \theta)$  とする. ただし  $\theta \in \Theta$  とし,  $\Theta$  を  $\mathbf{R}^1$  の开区間とする. また,  $F(x, \theta)$  を  $f(x, \theta)$  の累積分布関数 (c.d.f.) とする. このとき,  $X$  のもつ  $\theta$  に関する Fisher (F) 情報量を

$$I_X(\theta) := E_\theta \left[ \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X, \theta) \right\}^2 \right]$$

によって定義する. ここで, 積分の記号下で,  $\theta$  に関して2回偏微分可能ならば, この Fisher 情報量は  $I_X = E_\theta [-(\partial^2 / \partial \theta^2) \log f(X, \theta)]$  になり, 以後, この条件は満たされるものとする.

次に,  $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$  について,  $f(\cdot, \theta_2)$  に対する  $f(\cdot, \theta_1)$  の識別をするために, Kullback-Leibler (K-L) 情報量

$$I(\theta_1 : \theta_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \theta_1) \log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} dx$$

を考える.

いま,  $X_1, \dots, X_n$  をたがいに独立にいずれも p.d.f.  $f(x, \theta)$ , c.d.f.  $F(x, \theta)$  をもつ分布に従う確率変数とする. 上位の記録時刻 (upper record time)  $T_m$ , 上位の記録値 (upper record value)  $R_m$  を

$$T_1 := 1, \quad T_m := \min\{j | j > T_{m-1}, X_j > X_{T_{m-1}}\} \quad (m = 2, \dots, n),$$

$$R_m := X_{T_m} \quad (m = 1, \dots, n)$$

と定義する. さらに, 下位の (lower) 記録時刻, 記録値も同様に,

$$\begin{aligned} T_1 &:= 1, \quad T_m := \min\{j | j > T_{m-1}, X_j < X_{T_{m-1}}\} \quad (m = 2, \dots, n), \\ R_m &:= X_{T_m} \quad (m = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

と定義される.

### 3 記録データの Fisher 情報量

本節では, 第2節の設定の下で [HoN03] に従って, 記録値等に関する Fisher 情報量を求める. そのために次の表記を用いる.

- (i)  $I_{RT}^U(n)$ : 大きさ  $n$  の無作為標本から得られた記録数を  $N_n$  とし, 上位の記録値  $\mathbf{R} := (R_1, \dots, R_{N_n})$  と上位の記録時刻  $\mathbf{T} := (T_1, \dots, T_{N_n})$  の組  $(\mathbf{R}, \mathbf{T})$  のもつ  $\theta$  に関する Fisher 情報量
- (ii)  $I_R^U(n)$ : 大きさ  $n$  の無作為標本から得られた上位の記録値  $\mathbf{R}$  のもつ  $\theta$  に関する Fisher 情報量
- (iii)  $I_M^U(n)$ : 大きさ  $n$  の無作為標本から得られた最後 (最大) の記録値  $R_m$  のもつ  $\theta$  に関する Fisher 情報量

また, 下位の記録値等に関しても, 同様の表記  $I_{RT}^L(n), I_R^L(n), I_M^L(n)$  を用いる.

**注意 3.1** [HoN03] においては言及されていないが,  $\mathbf{X} := (X_1, \dots, X_n)$  のもつ  $\theta$  に関する F 情報量を  $I_{\mathbf{X}}(\theta)$  とするとき,  $I_{\mathbf{X}} - I_{RT}^U(n)$  を  $(\mathbf{R}, \mathbf{T})$  の情報量損失という. これは,  $(\mathbf{R}, \mathbf{T})$  が全標本  $\mathbf{X}$  と比較して, どれだけ情報を失うかを示す (非負値) 量と考えられる. 他の  $I_R^U(n), I_M^U(n), I_{RT}^L(n), I_R^L(n), I_M^L(n)$  についても同様である.

#### 3.1 Fisher 情報量

まず,  $X_1, \dots, X_n$  をたがいに独立にいずれも p.d.f.  $f(x, \theta)$ , c.d.f.  $F(x, \theta)$  をもつ分布に従う確率変数とする. このとき, 最大の記録値  $R_m$  は順序統計量を用いれば,  $R_m = \max_{1 \leq i \leq n} X_i =: X_{(n)}$  となるから, その p.d.f. は,

$$f_{R_m}(x, \theta) = nF(x, \theta)^{n-1}f(x, \theta)$$

になる. ここで,

$$\log f_{R_m}(x, \theta) = \log n + \log f(x, \theta) + (n-1) \log F(x, \theta)$$

であるから, 第2節の F 情報量の定義より, 最大の記録値  $R_m$  のもつ F 情報量は,

$$\begin{aligned} I_M^U(n) &= E_{\theta} \left[ -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f_{R_m}(X, \theta) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x, \theta) - (n-1) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log F(x, \theta) \right\} nF^{n-1}(x, \theta) f(x, \theta) dx \end{aligned} \quad (3.1)$$

となる. 最小の記録値のもつ F 情報量  $I_M^L(n)$  については, (3.1) において  $F(x, \theta)$  を  $1 - F(x, \theta)$  とすればよい.

次に, 記録値  $\mathbf{R}$ , 記録時刻  $T$  の j.p.d.f. は

$$f_{\mathbf{R}, T}(\mathbf{r}, t, \theta) = \prod_{i=1}^m f(r_i, \theta) \prod_{i=1}^m F^{\delta_i}(r_i, \theta) \quad (3.2)$$

と表される. ただし,  $r_1 < \dots < r_m, t_1 = 1 < t_2 < \dots < t_m \leq n, m = 1, \dots, n, \delta_i = t_{i+1} - t_i - 1, t_{m+1} = n + 1$  とする. このとき, 上位の記録値と記録時刻の組  $(\mathbf{R}, T)$  のもつ  $\theta$  に関する F 情報量は,

$$I_{RT}^U(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x, \theta) - i \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log F(x, \theta) \right\} F^i(x, \theta) f(x, \theta) dx \quad (3.3)$$

となる ([HoN03]). また, 下位の記録のもつ F 情報量  $I_{RT}^L(n)$  については, (3.3) において  $F(x, \theta)$  を  $1 - F(x, \theta)$  におきかえればよい.

**注意 3.2** (3.1), (3.3) より

$$I_{RT}^U(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} I_M^U(i) \quad (3.4)$$

を得る. 下位の記録値等のもつ F 情報量に関しても, (3.4) と同様の関係式が成り立つ. これより, 上位 (下位) の記録値と記録時刻の組の F 情報量を求めたいときには, (3.3) を直接計算しなくてもよく, それぞれ, 最大 (最小) の記録値のみの F 情報量を考慮すれば (3.4) から求められるということになる.

記録値  $\mathbf{R}$  の周辺確率密度関数 (m.p.d.f.) は, (3.2) において記録時刻  $T$  に関する周辺密度を考慮することにより得られる. すなわち, 各記録時刻間の間隔である  $\delta(m)$  を  $\Delta(m)$  の中で動かすことにより得られるので,

$$f_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = \prod_{i=1}^m f(r_i, \theta) \sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \prod_{i=1}^m F^{\delta_i}(r_i, \theta) \quad (3.5)$$

になる. ただし,  $r_1 < \dots < r_m, m = 1, \dots, n, \delta(m) := (\delta_1, \dots, \delta_m), \Delta(m) := \{(\delta_1, \dots, \delta_m) \mid \sum_{i=1}^m \delta_i = n - m, \delta_1, \dots, \delta_m : \text{非負の整数}\}$  とする. これより, 上位の記録値  $\mathbf{R}$  に含まれる F 情報量  $I_R^U(n)$  は

$$I_R^U(n) = E_{\theta} \left[ \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{N_n} \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} F(R_i, \theta)}{F(R_i, \theta)} \sum_{\delta(N_n) \in \Delta(N_n)} \Delta_i \prod_{j=1}^{N_n} F^{\Delta_j}(R_j, \theta)}{\sum_{\delta(N_n) \in \Delta(N_n)} \prod_{i=1}^{N_n} F^{\Delta_i}(R_i, \theta)} + \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(R_i, \theta) \right\}^2 \right] \quad (3.6)$$

となるが, これ以上の簡素化は難しい. そこで, 母数を位置, 尺度, 形状の場合に分けて考えると, シミュレーションによって数値計算ができる ([HoN03]).

いま, 確率変数  $X$  の c.d.f.  $F$  が次の形で表される場合に, それぞれの分布族の母数を  $\theta$  とする.

- (i)  $F(x, \theta) = F_0(x - \theta) \quad (\theta \in \mathbf{R}^1) \quad (\text{位置母数}),$
- (ii)  $F(x, \theta) = F_0(\theta x) \quad (\theta > 0) \quad (\text{尺度母数}),$
- (iii)  $F(x, \theta) = F_0(x^{\theta}) \quad (\theta \in \mathbf{R}^1) \quad (\text{形状母数}).$

このとき、上位の記録値  $R$  のもつ  $\theta$  に関する F 情報量は

$$I_R^U(n) = h_1(\theta) E_\theta \left[ \left\{ \frac{A(Y_1, \dots, Y_{N_n})}{B(Y_1, \dots, Y_{N_n})} + C(Y_1, \dots, Y_{N_n}) \right\}^2 \right] \quad (3.7)$$

になる ([HoN03]). ただし,  $Y_1, \dots, Y_{N_n}$  は分布  $F_0$  から得られた記録値とし,

$$A(y_1, \dots, y_m) = \text{coefficient of } s^{n-m-1} \text{ in } \left( \sum_{i=1}^m \frac{f_0(y_i) h_2(y_i)}{1 - F_0(y_i) s} \right) \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - F_0(y_i) s} \right),$$

$$B(y_1, \dots, y_m) = \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - F_0(y_i) s} \right)$$

とする. また,  $C, h_1, h_2$  は位置母数, 尺度母数, 形状母数のそれぞれの場合に対して,

$$(i') C(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m -\frac{f'_0(y_i)}{f_0(y_i)}, \quad h_1(\theta) = 1, \quad h_2(y_i) = -1,$$

$$(ii') C(y_1, \dots, y_m) = m + \sum_{i=1}^m \frac{y_i f'_0(y_i)}{f_0(y_i)}, \quad h_1(\theta) = \frac{1}{\theta^2}, \quad h_2(y_i) = y_i,$$

$$(iii') C(y_1, \dots, y_m) = m + \sum_{i=1}^m \left( 1 + \frac{y_i f'_0(y_i)}{f_0(y_i)} \right) \log y_i, \quad h_1(\theta) = \frac{1}{\theta^2}, \quad h_2(y_i) = y_i \log y_i$$

とする. なお, 下位の記録値  $R$  のもつ  $\theta$  に関する F 情報量  $I_R^L(n)$  については, (3.7) において  $F(x, \theta)$  を  $1 - F(x, \theta)$  に,  $A$  を  $-A$  におきかえればよい.

### 3.2 ガンマ分布の場合の記録データの Fisher 情報量

第 3.1 節において得られた記録値等の F 情報量の例として, [HoN03] において指数分布の尺度母数の場合が論じられている. しかし, この場合には情報量の計算が簡単であるが, 特殊過ぎるため, たとえば, 下位の最小記録の情報量  $I_M^L$  は  $n$  に関して一定となり, 標本の大きさが増えても変わらない. そこで, 本論において, 指数分布を特別な場合として含むガンマ分布の場合に, 記録値等に含まれる尺度母数に関する F 情報量を計算する. まず,  $X_1, \dots, X_n$  をたがいに独立にいずれも p.d.f.

$$f(x, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

をもつガンマ分布  $G(\alpha, 1/\beta)$  に従う確率変数とする. ただし,  $\alpha > 0, \beta > 0$  とし  $\alpha$  は既知とする. ここで,  $\alpha = 1$  とすれば指数分布となることに注意. まず, 最大の記録値, 最小の記録値のもつ  $\beta$  に関する F 情報量をそれぞれ求める.  $\log f(x, \beta)$  を  $\beta$  で 2 回偏微分すると,

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log f(x, \beta) = -\frac{\alpha}{\beta^2}$$

であり,  $\log F(x, \beta), \log(1 - F(x, \beta))$  の 2 回偏微分を求めるために,  $F(x, \beta), 1 - F(x, \beta)$  を変形すると,

$$F(x, \beta) = \int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\beta x} s^{\alpha-1} e^{-s} ds =: \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \gamma(\alpha, \beta x),$$

$$1 - F(x, \beta) = \int_x^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\beta x}^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} ds =: \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha, \beta x)$$

となる。ただし、 $t > 0$  について  $\gamma(\alpha, t), \Gamma(\alpha, t)$  は

$$\gamma(\alpha, t) = \int_0^t x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \Gamma(\alpha, t) = \int_t^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

で、それぞれ第1種、第2種不完全ガンマ関数と呼ばれている。よって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log F(x, \beta) &= \frac{1}{\gamma(\alpha, \beta x)^2} \left\{ \gamma(\alpha, \beta x) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \gamma(\alpha, \beta x) - \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \gamma(\alpha, \beta x) \right)^2 \right\} \\ \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log(1 - F(x, \beta)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha, \beta x)^2} \left\{ \Gamma(\alpha, \beta x) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \Gamma(\alpha, \beta x) - \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \Gamma(\alpha, \beta x) \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \gamma(\alpha, \beta x) &= \beta^{\alpha-1} x^\alpha e^{-\beta x}, & \frac{\partial}{\partial \beta} \Gamma(\alpha, \beta x) &= -\beta^{\alpha-1} x^\alpha e^{-\beta x}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \gamma(\alpha, \beta x) &= \beta^{\alpha-2} x^\alpha e^{-\beta x} (\alpha - \beta x - 1), & \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \Gamma(\alpha, \beta x) &= -\beta^{\alpha-2} x^\alpha e^{-\beta x} (\alpha - \beta x - 1), \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log F(x, \beta) &= \frac{1}{\gamma(\alpha, \beta x)^2} \beta^{\alpha-2} x^\alpha e^{-\beta x} \left\{ \gamma(\alpha, \beta x) (\alpha - \beta x - 1) - \beta^\alpha x^\alpha e^{-\beta x} \right\}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log(1 - F(x, \beta)) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha, \beta x)^2} \beta^{\alpha-2} x^\alpha e^{-\beta x} \left\{ \Gamma(\alpha, \beta x) (\alpha - \beta x - 1) + \beta^\alpha x^\alpha e^{-\beta x} \right\} \end{aligned}$$

を得る。よって、(3.1) より

$$\begin{aligned} I_M^U(n) &= \int_0^\infty \left[ \frac{\alpha}{\beta^2} - \frac{n-1}{\gamma(\alpha, \beta x)^2} \beta^{\alpha-2} x^\alpha e^{-\beta x} \left\{ \gamma(\alpha, \beta x) (\alpha - \beta x - 1) - \beta^\alpha x^\alpha e^{-\beta x} \right\} \right] \\ &\quad \cdot n \left( \frac{\gamma(\alpha, \beta x)}{\Gamma(\alpha)} \right)^{n-1} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\alpha}{\beta^2} - \frac{n(n-1)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)^n} \int_0^\infty \beta (\beta x)^{2\alpha-1} e^{-2\beta x} \gamma(\alpha, \beta x)^{n-3} \left\{ \gamma(\alpha, \beta x) (\alpha - \beta x - 1) - (\beta x)^\alpha e^{-\beta x} \right\} dx \\ &= \frac{\alpha}{\beta^2} - \frac{n(n-1)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)^n} \int_0^\infty t^{2\alpha-1} e^{-2t} \gamma(\alpha, t)^{n-3} \left\{ \gamma(\alpha, t) (\alpha - t - 1) - t^\alpha e^{-t} \right\} dt, \\ I_M^L(n) &= \int_0^\infty \left[ \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{n-1}{\Gamma(\alpha, \beta x)^2} \beta^{\alpha-2} x^\alpha e^{-\beta x} \left\{ \Gamma(\alpha, \beta x) (\alpha - \beta x - 1) + \beta^\alpha x^\alpha e^{-\beta x} \right\} \right] \\ &\quad \cdot n \left( \frac{\Gamma(\alpha, \beta x)}{\Gamma(\alpha)} \right)^{n-1} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \\ &= \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{n(n-1)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)^n} \int_0^\infty \beta (\beta x)^{2\alpha-1} e^{-2\beta x} \Gamma(\alpha, \beta x)^{n-3} \left\{ \Gamma(\alpha, \beta x) (\alpha - \beta x - 1) + (\beta x)^\alpha e^{-\beta x} \right\} dx \\ &= \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{n(n-1)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)^n} \int_0^\infty t^{2\alpha-1} e^{-2t} \Gamma(\alpha, t)^{n-3} \left\{ \Gamma(\alpha, t) (\alpha - t - 1) + t^\alpha e^{-t} \right\} dt \end{aligned}$$

となる。すなわち,

$$\begin{aligned}\beta^2 I_M^U(n) &= \alpha - \frac{n(n-1)}{\Gamma(\alpha)^n} \int_0^\infty t^{2\alpha-1} e^{-2t} \gamma(\alpha, t)^{n-3} \{\gamma(\alpha, t)(\alpha - t - 1) - t^\alpha e^{-t}\} dt, \\ \beta^2 I_M^L(n) &= \alpha + \frac{n(n-1)}{\Gamma(\alpha)^n} \int_0^\infty t^{2\alpha-1} e^{-2t} \Gamma(\alpha, t)^{n-3} \{\Gamma(\alpha, t)(\alpha - t - 1) + t^\alpha e^{-t}\} dt\end{aligned}\quad (3.8)$$

になる。次に, (3.4) より記録値と記録時刻の組  $(R, T)$  については,

$$\begin{aligned}\beta^2 I_{RT}^U(n) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} I_M^U(i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{\Gamma(\alpha)^i} \int_0^\infty t^{2\alpha-1} e^{-2t} \gamma(\alpha, t)^{i-3} \{\gamma(\alpha, t)(\alpha - t - 1) - t^\alpha e^{-t}\} dt \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)^3} \int_0^\infty t^{2\alpha-1} e^{-2t} \{\gamma(\alpha, t)(\alpha - t - 1) - t^\alpha e^{-t}\} \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n (i-1) \gamma^*(\alpha, t)^{i-3} \right\} dt\end{aligned}\quad (3.9)$$

となる。ただし,  $\gamma^*(\alpha, t) = \gamma(\alpha, t)/\Gamma(\alpha)$  とする。(3.9) の最下行の  $\{\dots\}$  の和は, 等差数列と等比数列の積の和として考えられるので,  $S := \{\dots\}$  とおけば,

$$\begin{aligned}(1 - \gamma^*(\alpha, t))S &= \gamma^*(\alpha, t)^{-1} + 1 + \gamma^*(\alpha, t) + \dots + \gamma^*(\alpha, t)^{n-3} - (n-1)\gamma^*(\alpha, t)^{n-2} \\ &= \frac{1 - n\gamma^*(\alpha, t)^{n-1} + (n-1)\gamma^*(\alpha, t)^n}{\gamma^*(\alpha, t)(1 - \gamma^*(\alpha, t))}\end{aligned}$$

となる。ここで,  $\Gamma^*(\alpha, t) := \Gamma(\alpha, t)/\Gamma(\alpha)$  とすれば,

$$\Gamma^*(\alpha, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} ds = 1 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{\alpha-1} e^{-s} ds = 1 - \gamma^*(\alpha, t)$$

であるから,

$$S = \frac{1 - n\gamma^*(\alpha, t)^{n-1} + (n-1)\gamma^*(\alpha, t)^n}{\gamma^*(\alpha, t)\Gamma^*(\alpha, t)^2}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}\beta^2 I_{RT}^U(n) &= \alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)^3} \int_0^\infty t^{2\alpha-1} e^{-2t} \{\gamma(\alpha, t)(\alpha - t - 1) - t^\alpha e^{-t}\} \\ &\quad \cdot \frac{1 - n\gamma^*(\alpha, t)^{n-1} + (n-1)\gamma^*(\alpha, t)^n}{\gamma^*(\alpha, t)\Gamma^*(\alpha, t)^2} dt\end{aligned}\quad (3.10)$$

を得る。下位の記録値と記録時刻の組のもつ  $\beta$  に関する F 情報量  $I_{RT}^L(n)$  も同様に,

$$\begin{aligned}\beta^2 I_{RT}^L(n) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} I_M^L(i) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{\Gamma(\alpha)^i} \int_0^\infty t^{2\alpha-1} e^{-2t} \Gamma(\alpha, t)^{i-3} \{\Gamma(\alpha, t)(\alpha - t - 1) + t^\alpha e^{-t}\} dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)^3} \int_0^\infty t^{2\alpha-1} e^{-2t} \{ \Gamma(\alpha, t)(\alpha - t - 1) + t^\alpha e^{-t} \} \\
&\quad \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n (i-1) \Gamma^*(\alpha, t)^{i-3} \right\} dt \\
&= \alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)^3} \int_0^\infty t^{2\alpha-1} e^{-2t} \{ \Gamma(\alpha, t)(\alpha - t - 1) + t^\alpha e^{-t} \} \\
&\quad \cdot \frac{1 - n\Gamma^*(\alpha, t)^{n-1} + (n-1)\Gamma^*(\alpha, t)^n}{\Gamma^*(\alpha, t)\gamma^*(\alpha, t)^2} dt \quad (3.11)
\end{aligned}$$

となる. 最後に,  $I_R^U(n)$  は  $\beta$  が尺度母数であるから (3.7) により与えられる. ただし,  $Y_1, \dots, Y_m$  は  $G(\alpha, 1)$ , すなわち,  $F_0(x) = \gamma^*(\alpha, x)$  をもつような分布から得られた記録値とし,

$$\begin{aligned}
A(y_1, \dots, y_m) &= \text{coefficient of } s^{n-m-1} \text{ in } \left( \sum_{i=1}^m \frac{y_i^\alpha e^{-y_i}}{\Gamma(\alpha)(1 - \gamma^*(\alpha, y_i)s)} \right) \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - \gamma^*(\alpha, y_i)s} \right), \\
B(y_1, \dots, y_m) &= \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - \gamma^*(\alpha, y_i)s} \right)
\end{aligned}$$

とする. さらに,  $f_0(x) = (1/\Gamma(\alpha))x^{\alpha-1}e^{-x}$  であり,

$$f'_0(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-2} e^{-x} (\alpha - x - 1)$$

となるから,

$$C(y_1, \dots, y_m) = m + \sum_{i=1}^m (\alpha - y_i - 1) = \alpha m - \sum_{i=1}^m y_i$$

とすればよい. これらより,

$$\beta^2 I_R^U(n) = E_\theta \left[ \left\{ \frac{A(Y_1, \dots, Y_{N_n})}{B(Y_1, \dots, Y_{N_n})} + \alpha N_n - \sum_{i=1}^{N_n} Y_i \right\}^2 \right] \quad (3.12)$$

となり, ここからシミュレーションによる数値計算により情報量の値が得られる. また,  $I_R^L(n)$  についても同様に,

$$\begin{aligned}
A(y_1, \dots, y_m) &= \text{coefficient of } s^{n-m-1} \text{ in } \left( \sum_{i=1}^m \frac{y_i^\alpha e^{-y_i}}{\Gamma(\alpha)(1 - \Gamma^*(\alpha, y_i)s)} \right) \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - \Gamma^*(\alpha, y_i)s} \right), \\
B(y_1, \dots, y_m) &= \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \left( \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - \Gamma^*(\alpha, y_i)s} \right)
\end{aligned}$$

として,

$$\beta^2 I_R^L(n) = E_\theta \left[ \left\{ -\frac{A(Y_1, \dots, Y_{N_n})}{B(Y_1, \dots, Y_{N_n})} + \alpha N_n - \sum_{i=1}^{N_n} Y_i \right\}^2 \right] \quad (3.13)$$



より、シミュレーションを用いて情報量の値を得る。

ガンマ分布  $G(\alpha, 1/\beta)$  は、 $\alpha \rightarrow \infty$  のとき、正規分布に収束する。すなわち、確率変数  $X$  が  $G(\alpha, 1/\beta)$  に従うとき、規格化した  $\{X - (\alpha/\beta)\}/(\sqrt{\alpha}/\beta)$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う確率変数に法則収束する。

ガンマ分布  $G(\alpha, 1/\beta)$  から得られた上位の最大の記録値に含まれる  $\beta$  に関する F 情報量  $I_M^U(n)$  の値、下位の最小の記録値に含まれる  $\beta$  に関する F 情報量の値  $I_M^L(n)$  をそれぞれ求める (表 1, 2 参照)。いま、ガンマ分布は  $\alpha \rightarrow \infty$  のとき、対称な正規分布に収束するから、 $I_M^U(n)$  と  $I_M^L(n)$  の相対差は小さくなる (表 3 参照)。これは指数分布、すなわち  $\alpha = 1$  の場合と著しく異なる点である。また、 $G(\alpha, 1/\beta)$  から得られた記録値と記録時間の組  $(R, T)$  に含まれる  $\beta$  に関する情報量  $I_{RT}^U(n)$  および  $I_{RT}^L(n)$  についても同様の傾向が見られる (表 4-6 参照)。さらに、 $G(\alpha, 1/\beta)$  から得られた上位および下位の記録値に含まれる  $\beta$  に関する情報量  $I_R^U(n)$  および  $I_R^L(n)$  を繰り返し回数 200000 回のシミュレーションによって求め、その相対差を考察する (表 7-9 参照)。これについても、シミュレーションの誤差のため若干のばらつきはあるが同様の傾向が見られる。さて、記録時刻  $T$  の分布は  $\theta$  に依存しない、すなわち、 $T$  は補助統計量であることが知られているが、表 4 と表 7、表 5 と表 8 を比べると、シミュレーションによる誤差はあるものの記録値と記録時刻の組の F 情報量の値の方が、記録値のみの F 情報量の値よりもほとんどの場合で大きくなっていることが読みとれる。このことに対し、相対差をとったものを上位の場合、下位の場合についてそれぞれ示す (表 10, 11 参照)。表 10, 11 より、記録時刻を含めることによる F 情報量への影響は、標本の大きさ  $n$  が大きくなるほど大きくなることがわかる。また、表 10 より、上位の場合は  $\alpha$  を大きくすると、記録時刻を含める影響が大きくなる傾向があるのに対し、表 11 の下位の場合では逆に影響が小さくなっていく傾向があることが読みとれた。

表 1:  $G(\alpha, 1/\beta)$  から得られた最大の記録値に対する  $\beta^2 I_M^U(n)$  の値

$\alpha$													
$n$		1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	75	100
		1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	10.00	20.00	30.00	40.00	50.00	75.00	100.00
1		1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	10.00	20.00	30.00	40.00	50.00	75.00	100.00
2		1.81	3.48	5.11	6.71	8.30	16.12	31.52	46.78	61.97	77.11	114.84	152.45
3		2.50	4.69	6.80	8.86	10.89	20.82	40.21	59.33	78.32	97.23	144.25	191.06
4		3.11	5.74	8.24	10.67	13.07	24.71	47.32	69.56	91.60	113.53	168.00	222.18
5		3.66	6.67	9.50	12.26	14.96	28.05	53.39	78.25	102.88	127.34	188.09	248.46
10		5.86	10.23	14.30	18.20	22.02	40.32	75.38	109.57	143.32	176.79	259.69	341.91
20		8.87	14.94	20.49	25.79	30.94	55.47	102.03	147.21	191.68	235.70	344.51	452.21
30		11.05	18.24	24.78	31.00	37.03	65.63	119.67	171.96	223.36	274.19	399.69	523.78
40		12.79	20.84	28.13	35.04	41.73	73.40	133.05	190.66	247.24	303.14	441.10	577.41
50		14.26	23.00	30.89	38.37	45.59	79.73	143.89	205.78	266.50	326.49	474.41	620.50
75		17.18	27.25	36.29	44.84	53.08	91.90	164.58	234.54	303.09	370.74	537.42	701.89
100		19.45	30.51	40.41	49.75	58.75	101.03	180.00	255.89	330.18	403.47	583.91	761.85

表 2:  $G(\alpha, 1/\beta)$  から得られた最小の記録値に対する  $\beta^2 I_M^L(n)$  の値

		$\alpha$											
$n$		1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	75	100
		1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	10.00	20.00	30.00	40.00	50.00	75.00	100.00
2		1.00	2.28	3.61	4.96	6.33	13.31	27.53	41.88	56.30	70.77	107.07	143.48
3		1.00	2.44	3.99	5.58	7.20	15.54	32.69	50.10	67.65	85.29	129.62	174.16
4		1.00	2.56	4.26	6.03	7.84	17.23	36.67	56.48	76.49	96.62	147.28	198.23
5		1.00	2.65	4.48	6.39	8.36	18.59	39.92	61.72	83.77	105.97	161.89	218.19
10		1.00	2.92	5.14	7.51	9.98	23.08	50.83	79.44	108.49	137.82	211.93	286.72
20		1.00	3.16	5.77	8.62	11.61	27.80	62.64	98.87	135.81	173.19	267.89	363.70
30		1.00	3.28	6.11	9.23	12.54	30.59	69.82	110.78	152.65	195.08	302.72	411.77
40		1.00	3.36	6.33	9.65	13.18	32.56	74.97	119.40	164.87	211.00	328.15	446.94
50		1.00	3.41	6.50	9.96	13.66	34.08	78.98	126.14	174.46	223.52	348.21	474.72
75		1.00	3.51	6.78	10.50	14.50	36.81	86.28	138.48	192.07	246.56	385.22	526.09
100		1.00	3.56	6.97	10.86	15.07	38.70	91.45	147.26	204.65	263.05	411.82	563.08

表 3:  $(I_M^U(n) - I_M^L(n))/I_M^U(n)$  の値

		$\alpha$											
$n$		1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	75	100
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2		.448	.346	.294	.260	.237	.174	.127	.105	.091	.082	.068	.059
3		.600	.479	.414	.370	.339	.254	.187	.156	.136	.123	.101	.088
4		.678	.554	.483	.435	.400	.303	.225	.188	.165	.149	.123	.108
5		.727	.602	.529	.479	.441	.337	.252	.211	.186	.168	.139	.122
10		.829	.715	.640	.587	.546	.428	.326	.275	.243	.220	.184	.161
20		.887	.789	.719	.666	.625	.499	.386	.328	.291	.265	.222	.196
30		.910	.820	.754	.702	.661	.534	.417	.356	.317	.289	.243	.214
40		.922	.839	.775	.725	.684	.556	.437	.374	.333	.304	.256	.226
50		.930	.852	.790	.740	.700	.573	.451	.387	.345	.315	.266	.235
75		.942	.871	.813	.766	.727	.599	.476	.410	.366	.335	.283	.250
100		.945	.883	.828	.782	.743	.617	.492	.425	.380	.348	.295	.261

表 4:  $G(\alpha, 1/\beta)$  から得られた記録値と記録時刻の組に対する  $\beta^2 I_{RT}^U(n)$  の値

		$\alpha$											
$n$		1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	75	100
		1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	10.00	20.00	30.00	40.00	50.00	75.00	100.00
2		1.90	3.74	5.55	7.35	9.15	18.06	35.76	53.39	70.98	88.55	132.42	176.23
3		2.74	5.30	7.82	10.31	12.78	25.00	49.16	73.17	97.09	120.96	180.50	239.91
4		3.52	6.74	9.88	12.98	16.05	31.18	60.99	90.56	119.99	149.34	222.50	295.46
5		4.25	8.07	11.78	15.43	19.04	36.79	71.67	106.21	140.57	174.81	260.12	345.15
10		7.43	13.72	19.72	25.59	31.36	59.55	114.50	168.66	222.40	275.89	408.88	541.24
20		12.41	22.23	31.49	40.48	49.28	91.97	174.53	255.53	335.73	415.42	613.26	809.85
30		16.41	28.88	40.56	51.84	62.89	116.20	218.87	319.36	418.73	517.39	762.08	1005.00
40		19.81	34.45	48.10	61.26	74.11	136.01	254.88	371.02	485.77	599.63	881.83	1161.80
50		22.81	39.31	54.64	69.39	83.79	152.97	285.54	414.92	542.65	669.34	983.19	1294.50
75		29.14	49.44	68.18	86.16	103.67	187.55	347.70	503.64	657.42	809.83	1187.06	1560.91
100		34.39	57.71	79.16	99.71	119.69	215.19	397.05	573.88	748.12	920.71	1347.66	1770.55

表 5:  $G(\alpha, 1/\beta)$  から得られた記録値と記録時刻の組に対する  $\beta^2 I_{RT}^L(n)$  の値

$n$	$\alpha$											
	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	75	100
1	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	10.00	20.00	30.00	40.00	50.00	75.00	100.00
2	1.50	3.14	4.80	6.48	8.17	16.66	33.76	50.94	68.15	85.39	128.53	171.74
3	1.83	3.95	6.13	8.34	10.57	21.84	44.66	67.64	90.70	113.82	171.74	229.79
4	2.08	4.59	7.20	9.85	12.53	26.14	53.83	81.76	109.82	137.97	208.56	279.35
5	2.28	5.12	8.09	11.13	14.20	29.86	61.81	94.10	126.58	159.16	240.94	322.99
10	2.93	6.94	11.25	15.69	20.23	43.61	91.80	140.79	190.19	239.85	364.71	490.22
20	3.60	8.99	14.92	21.13	27.51	60.78	130.13	201.04	272.74	344.95	526.88	710.06
30	3.99	10.27	17.29	24.69	32.33	72.43	156.58	242.91	330.36	418.52	640.89	865.01
40	4.28	11.21	19.05	27.37	35.99	81.42	177.18	275.67	375.55	476.32	730.68	987.24
50	4.50	11.96	20.47	29.54	38.96	88.79	194.21	302.83	413.09	524.40	805.53	1089.23
75	4.90	13.35	23.15	33.66	44.63	103.07	227.50	356.14	486.93	619.10	953.28	1290.86
100	5.19	14.36	25.11	36.72	48.86	113.88	252.95	397.05	543.73	692.07	1067.42	1446.83

表 6:  $(I_{RT}^U(n) - I_{RT}^L(n))/I_{RT}^U(n)$  の値

$n$	$\alpha$											
	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	75	100
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	.212	.161	.135	.119	.107	.078	.056	.046	.040	.036	.029	.025
3	.330	.255	.216	.191	.173	.127	.092	.076	.066	.059	.049	.042
4	.407	.318	.271	.241	.219	.162	.118	.097	.085	.076	.063	.055
5	.462	.365	.313	.279	.254	.188	.138	.114	.100	.090	.074	.064
10	.606	.494	.430	.387	.355	.268	.198	.165	.145	.131	.108	.094
20	.710	.596	.526	.478	.442	.339	.254	.213	.188	.170	.141	.123
30	.756	.644	.574	.524	.486	.377	.285	.239	.211	.191	.159	.139
40	.784	.675	.604	.553	.514	.401	.305	.257	.227	.206	.171	.150
50	.803	.696	.625	.574	.535	.420	.320	.270	.239	.217	.181	.159
75	.832	.730	.660	.609	.570	.450	.346	.293	.259	.236	.197	.173
100	.849	.750	.683	.632	.592	.471	.363	.308	.273	.248	.208	.183

表 7:  $G(\alpha, 1/\beta)$  から得られた記録値に対する  $\beta^2 I_R^U(n)$  の値

$n$	$\alpha$											
	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	75	100
1	1.00	2.00	3.01	4.01	5.03	10.00	20.13	30.10	39.85	49.84	74.88	100.04
2	1.91	3.75	5.62	7.33	9.18	18.02	35.88	53.46	71.22	88.57	132.26	176.15
3	2.72	5.29	7.76	10.29	12.65	24.60	48.54	72.14	95.46	119.34	178.08	235.87
4	3.47	6.64	9.66	12.80	15.78	30.45	59.25	88.05	116.58	145.54	216.55	285.96
5	4.19	7.92	11.43	15.02	18.35	35.51	69.02	101.74	134.32	166.74	248.43	329.16
10	7.11	12.93	18.32	23.66	28.73	54.05	103.89	152.41	200.11	248.47	365.06	483.82
20	11.44	19.84	27.63	35.32	42.70	78.74	148.69	214.40	284.52	350.46	513.09	675.11
30	14.47	25.12	34.34	44.12	52.81	96.46	179.14	260.95	340.27	419.28	614.02	806.63
40	16.83	29.20	40.08	50.48	60.59	109.43	202.49	293.05	382.63	470.11	692.60	904.99
50	19.03	32.66	44.50	56.00	67.37	120.80	221.60	320.30	415.97	510.79	748.74	988.76
75	23.48	39.40	53.46	66.79	79.80	141.85	260.17	368.68	418.42	592.86	859.95	1129.96
100	27.19	44.67	59.87	75.27	88.67	156.57	283.53	408.65	533.58	647.82	940.33	1241.61

表 8:  $G(\alpha, 1/\beta)$  から得られた記録値に対する  $\beta^2 I_R^L(n)$  の値

		$\alpha$											
$n$		1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	75	100
		1.01	1.99	2.99	4.00	4.99	9.96	19.82	30.06	39.72	50.16	75.57	99.80
2		1.49	3.12	4.80	6.50	8.18	16.67	33.73	51.06	67.66	85.13	128.60	172.81
3		1.77	3.82	5.92	8.15	10.28	21.34	43.62	66.43	88.77	111.47	169.67	226.13
4		1.92	4.36	6.84	9.29	12.01	25.19	51.88	78.48	105.53	133.74	201.33	270.49
5		2.06	4.69	7.49	10.28	13.14	27.92	57.70	88.70	119.85	150.10	228.24	304.72
10		2.39	5.79	9.40	13.23	17.11	37.59	79.08	123.21	166.15	209.28	320.37	429.12
20		2.58	6.69	11.33	16.30	21.30	48.24	104.28	161.53	221.89	277.65	430.96	580.55
30		2.66	7.19	12.33	17.94	23.78	54.35	119.47	186.43	255.38	323.62	499.32	675.08
40		2.70	7.47	13.00	19.07	25.26	58.53	130.24	204.42	278.53	356.96	550.09	737.26
50		2.71	7.69	13.42	19.83	26.50	62.05	139.59	216.53	301.74	379.97	587.16	798.92
75		2.74	7.96	14.33	21.20	28.37	68.13	153.65	242.54	335.20	426.00	658.51	897.08
100		2.80	8.21	14.80	22.01	29.92	72.75	164.38	262.23	357.72	459.25	710.77	969.54

表 9:  $(I_R^U(n) - I_R^L(n))/I_R^U(n)$  の値

		$\alpha$											
$n$		1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	75	100
		-.007	.010	.005	.004	.006	.004	.015	.001	.003	-.006	-.009	.006
2		.220	.168	.144	.113	.109	.074	.060	.045	.050	.039	.028	.019
3		.350	.278	.237	.209	.187	.132	.101	.079	.070	.066	.047	.041
4		.445	.343	.293	.275	.239	.173	.124	.109	.095	.081	.070	.054
5		.508	.407	.345	.315	.284	.214	.164	.128	.108	.100	.081	.074
10		.665	.552	.487	.441	.404	.304	.239	.192	.170	.158	.122	.113
20		.774	.663	.590	.538	.501	.387	.299	.247	.220	.208	.160	.140
30		.816	.714	.641	.593	.550	.437	.333	.286	.249	.228	.187	.163
40		.840	.744	.676	.622	.583	.465	.357	.302	.272	.241	.206	.185
50		.858	.764	.698	.646	.607	.486	.370	.324	.274	.256	.216	.192
75		.883	.798	.732	.683	.644	.520	.409	.342	.304	.281	.234	.206
100		.897	.816	.753	.708	.663	.535	.420	.358	.330	.291	.244	.219

表 10:  $(I_{RT}^U(n) - I_R^U(n))/I_R^U(n)$  の値

		$\alpha$											
$n$		1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	75	100
		.000	-.007	-.002	-.003	-.005	.000	-.006	-.003	.004	.003	.002	-.004
2		-.003	-.003	-.011	.004	-.004	.002	-.003	-.001	-.003	.000	.001	.000
3		.006	.002	.008	.002	.010	.016	.013	.014	.017	.014	.014	.017
4		.012	.015	.022	.013	.017	.024	.029	.028	.029	.026	.028	.033
5		.013	.019	.031	.027	.037	.036	.038	.044	.046	.049	.047	.049
10		.044	.060	.077	.081	.091	.102	.102	.107	.111	.110	.120	.119
20		.085	.121	.140	.146	.154	.168	.174	.192	.180	.185	.195	.200
30		.134	.150	.181	.175	.191	.205	.222	.224	.231	.234	.241	.246
40		.177	.180	.200	.214	.223	.243	.259	.266	.270	.276	.273	.284
50		.199	.204	.228	.239	.244	.266	.289	.295	.305	.310	.313	.309
75		.241	.255	.275	.290	.299	.322	.336	.366	.366	.366	.380	.381
100		.265	.292	.322	.325	.350	.374	.400	.404	.402	.421	.433	.426

表 11:  $(I_{RT}^L(n) - I_R^L(n))/I_R^L(n)$  の値

$n$	$\alpha$											
	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50	75	100
1	-.007	.003	.003	.001	.001	.004	.009	-.002	.007	-.003	-.008	.002
2	.007	.005	.000	-.002	-.001	-.001	.001	-.002	.007	.003	.000	-.006
3	.037	.035	.035	.024	.028	.022	.024	.018	.022	.021	.012	.016
4	.084	.053	.053	.060	.043	.038	.038	.042	.041	.032	.036	.033
5	.106	.092	.081	.082	.080	.070	.071	.061	.056	.060	.056	.060
10	.227	.198	.197	.186	.182	.160	.161	.143	.145	.146	.138	.142
20	.394	.343	.317	.296	.292	.260	.248	.245	.229	.242	.223	.223
30	.504	.427	.402	.376	.360	.333	.311	.303	.294	.293	.284	.281
40	.585	.501	.466	.436	.425	.391	.360	.349	.348	.334	.328	.339
50	.663	.555	.525	.489	.470	.431	.391	.399	.369	.380	.372	.363
75	.786	.677	.615	.588	.573	.513	.481	.468	.453	.453	.448	.439
100	.854	.748	.697	.668	.633	.565	.539	.514	.520	.507	.502	.492

## 4 記録データの Kullback-Leibler 情報量

この節では、前節の F 情報量と同様にして、母数  $\theta_2$  をもつ分布に対する母数  $\theta_1$  を持つ分布の識別をするために、記録値等に関する K-L 情報量  $I_{RT}^U(n; \theta_1, \theta_2)$ ,  $I_R^U(n; \theta_1, \theta_2)$ ,  $I_M^U(n; \theta_1, \theta_2)$ ,  $I_{RT}^L(n; \theta_1, \theta_2)$ ,  $I_R^L(n; \theta_1, \theta_2)$ ,  $I_M^L(n; \theta_1, \theta_2)$  を用いて考察する ([YA03]).

### 4.1 Kullback-Leibler 情報量

最大の記録値  $R_m$  は得られた無作為標本  $X_1, \dots, X_n$  の最大値であり、順序統計量  $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  を用いれば  $R_m = X_{(n)}$  になる。このとき、その p.d.f. は

$$f_{R_m}(x) = nF^{n-1}(x, \theta)f(x, \theta)$$

であるから、第 2 節の K-L 情報量の定義より、 $R_m$  のもつ K-L 情報量は、

$$I_M^U(n; \theta_1, \theta_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} + (n-1) \log \frac{F(x, \theta_1)}{F(x, \theta_2)} \right\} nF^{n-1}(x, \theta_1)f(x, \theta_1)dx \quad (4.1)$$

になる。下位の記録値については  $F$  を  $1-F$  に変えればよい。

また、 $(R, T)$  のもつ K-L 情報量は

$$\begin{aligned} I_{RT}^U(n; \theta_1, \theta_2) &= E_{\theta_1} \left[ \log \frac{f(R, T, \theta_1)}{f(R, T, \theta_2)} \right] \\ &= E_{\theta_1} \left[ \sum_{i=1}^{N_n} \log \frac{f(R_i, \theta_1)}{f(R_i, \theta_2)} \right] + E_{\theta_1} \left[ \sum_{i=1}^{N_n} \Delta_i \log \frac{F(R_i, \theta_1)}{F(R_i, \theta_2)} \right] \\ &=: E_1 + E_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる。ここで、

$$E_1 = \sum_{m=1}^n E_1(m)$$

とし、各  $m = 1, \dots, n$  について、

$$E_1(m) = \int \cdots \int_{r_1 < \cdots < r_m} \sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{f(r_i, \theta_1)}{f(r_i, \theta_2)} \right\} \prod_{j=1}^m f(r_j, \theta_1) \prod_{k=1}^m F^{\delta_k}(r_k, \theta_1) dr_1 \cdots dr_m$$

とする。このとき、 $E_1(m)$  を計算すると、

$$E_1(m) = \int \cdots \int_{r_1 < \cdots < r_m} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{f(r_i, \theta_1)}{f(r_i, \theta_2)} \right\} \prod_{j=1}^m f(r_j, \theta_1) \sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \prod_{k=1}^m F^{\delta_k}(r_k, \theta_1) dr_1 \cdots dr_m$$

となる。ここで、十分小さい  $s$  に対して、

$$\sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \prod_{k=1}^m F^{\delta_k}(r_k, \theta) = \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - F(r_k, \theta)s} \quad (4.3)$$

となるから、

$$E_1(m) = \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \int \cdots \int_{r_1 < \cdots < r_m} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{f(r_i, \theta_1)}{f(r_i, \theta_2)} \right\} \prod_{j=1}^m \frac{f(r_j, \theta_1)}{1 - F(r_j, \theta_1)s} dr_1 \cdots dr_m$$

となる。さらに、この式の係数の項は、

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_{r_1 < \cdots < r_m} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{f(r_i, \theta_1)}{f(r_i, \theta_2)} \right\} \prod_{j=1}^m \frac{f(r_j, \theta_1)}{1 - F(r_j, \theta_1)s} dr_1 \cdots dr_m \\ &= \frac{1}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{f(r_i, \theta_1)}{f(r_i, \theta_2)} \right\} \prod_{j=1}^m \frac{f(r_j, \theta_1)}{1 - F(r_j, \theta_1)s} dr_1 \cdots dr_m \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} \right) \frac{f(x, \theta_1)}{1 - F(x, \theta_1)s} dx \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y, \theta_1)}{1 - F(y, \theta_1)s} dy \right)^{m-1} \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \left( -\frac{1}{s} \log(1-s) \right)^{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} F^i(x, \theta_1) s^i \right) f(x, \theta_1) dx \end{aligned}$$

となる。よって、

$$E_1(m) = \sum_{i=0}^{n-m} \frac{1}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} \right) F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx$$

· coefficient of  $s^{n-i-1}$  in  $(-\log(1-s))^{m-1}$

となるから、

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{m=1}^n E_1(m) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} \right) F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \\ &\quad \cdot \text{coefficient of } s^{n-i-1} \text{ in } \sum_{m=1}^{n-i} \frac{1}{(m-1)!} (-\log(1-s))^{m-1} \end{aligned}$$

となる. ここで上式において, その係数部分は,

$$\begin{aligned}
 & \text{coefficient of } s^{n-i-1} \text{ in } \sum_{m=1}^{n-i} \frac{1}{(m-1)!} (-\log(1-s))^{m-1} \\
 &= \text{coefficient of } s^{n-i-1} \text{ in } \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} (-\log(1-s))^{m-1} \\
 &= \text{coefficient of } s^{n-i-1} \text{ in } \exp(-\log(1-s)) \\
 &= \text{coefficient of } s^{n-i-1} \text{ in } \frac{1}{1-s} \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

となる. よって,

$$E_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} \right) F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \tag{4.5}$$

を得る. また, 同様にして,

$$E_2 = \sum_{m=1}^n E_2(m)$$

と表すと,

$$\begin{aligned}
 E_2(m) &= \int \cdots \int_{r_1 < \cdots < r_m} \sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \left\{ \sum_{i=1}^m \delta_i \log \frac{F(r_i, \theta_1)}{F(r_i, \theta_2)} \right\} \prod_{j=1}^m f(r_j, \theta_1) \prod_{k=1}^m F^{\delta_k}(r_k, \theta_1) dr_1 \cdots dr_m \\
 &= \int \cdots \int_{r_1 < \cdots < r_m} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{F(r_i, \theta_1)}{F(r_i, \theta_2)} \right\} \prod_{j=1}^m f(r_j, \theta_1) \sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \delta_i \prod_{k=1}^m F^{\delta_k}(r_k, \theta_1) dr_1 \cdots dr_m
 \end{aligned}$$

となる. ここで, 十分小さい  $s$  に対して,

$$\begin{aligned}
 \sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \delta_i \prod_{k=1}^m F^{\delta_k}(r_k, \theta) &= \sum_{\delta(m) \in \Delta(m)} \frac{F(r_i, \theta)}{f(r_i, \theta)} \frac{\partial}{\partial r_i} \prod_{k=1}^m F^{\delta_k}(r_k, \theta) \\
 &= \frac{F(r_i, \theta)}{f(r_i, \theta)} \frac{\partial}{\partial r_i} \left[ \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - F(r_k, \theta)s} \right] \\
 &= \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \frac{F(r_i, \theta)s}{1 - F(r_i, \theta)s} \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - F(r_k, \theta)s}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 E_2(m) &= \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in} \\
 &\int \cdots \int_{r_1 < \cdots < r_m} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{F(r_i, \theta_1)}{F(r_i, \theta_2)} \right\} \frac{F(r_i, \theta_1)s}{1 - F(r_i, \theta_1)s} \prod_{j=1}^m f(r_j, \theta_1) \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - F(r_k, \theta_1)s} dr_1 \cdots dr_m
 \end{aligned}$$

となる. さらに, この下行の項は,

$$\int \cdots \int_{r_1 < \cdots < r_m} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{F(r_i, \theta_1)}{F(r_i, \theta_2)} \right\} \frac{F(r_i, \theta_1)s}{1 - F(r_i, \theta_1)s} \prod_{j=1}^m f(r_j, \theta_1) \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - F(r_k, \theta_1)s} dr_1 \cdots dr_m$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{s}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^m \log \frac{F(r_i, \theta_1)}{F(r_i, \theta_2)} \right\} \frac{F(r_i, \theta)}{1 - F(r_i, \theta)s} \prod_{j=1}^m \frac{f(r_j, \theta_1)}{1 - F(r_j, \theta_1)s} dr_1 \cdots dr_m \\
&= \frac{s}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \log \frac{F(x, \theta_1)}{F(x, \theta_2)} \right) \frac{f(x, \theta_1)F(x, \theta_1)}{(1 - F(x, \theta_1)s)^2} dx \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y, \theta_1)}{1 - F(y, \theta_1)s} dy \right)^{m-1} \\
&= \frac{s}{(m-1)!} \left( -\frac{1}{s} \log(1-s) \right)^{m-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \log \frac{F(x, \theta_1)}{F(x, \theta_2)} \right) \left( \sum_{i=1}^{\infty} i F^i(x, \theta_1) s^{i-1} \right) f(x, \theta_1) dx
\end{aligned}$$

となり, この  $i$  に関する和は 1 から  $n-m$  まで考えれば十分であるから,

$$\begin{aligned}
E_2(m) &= \sum_{i=0}^{n-m} \frac{i}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \log \frac{F(x, \theta_1)}{F(x, \theta_2)} \right) F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \\
&\quad \cdot \text{coefficient of } s^{n-i-1} \text{ in } (-\log(1-s))^{m-1}
\end{aligned}$$

となる. これより,

$$\begin{aligned}
E_2 &= \sum_{m=1}^n E_2(m) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} i \int_{-\infty}^{\infty} \left( \log \frac{F(x, \theta_1)}{F(x, \theta_2)} \right) F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \\
&\quad \cdot \text{coefficient of } s^{n-i-1} \text{ in } \sum_{m=1}^{n-i} \frac{1}{(m-1)!} (-\log(1-s))^{m-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} i \int_{-\infty}^{\infty} \left( \log \frac{F(x, \theta_1)}{F(x, \theta_2)} \right) F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \tag{4.7}
\end{aligned}$$

となるから, (4.5) と (4.7) より,

$$I_{RT}^U(n; \theta_1, \theta_2) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} + i \log \frac{F(x, \theta_1)}{F(x, \theta_2)} \right\} F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \tag{4.8}$$

を得る.

**注意 4.3** (4.8) を  $I_M^U(\cdot; \theta_1, \theta_2)$  を用いれば

$$\begin{aligned}
I_{RT}^U(n; \theta_1, \theta_2) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} + i \log \frac{F(x, \theta_1)}{F(x, \theta_2)} \right\} (i+1) F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} I_M^U(i+1; \theta_1, \theta_2) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} I_M^U(i; \theta_1, \theta_2) \tag{4.9}
\end{aligned}$$

になる.



さらに  $\mathbf{R}$  のもつ K-L 情報量を考えると,  $\mathbf{R}$  の m.p.d.f. (3.5) を用いて,

$$\begin{aligned} I_R^U(n; \theta_1, \theta_2) &= E_{\theta_1} \left[ \log \frac{f(\mathbf{R}, \theta_1)}{f(\mathbf{R}, \theta_2)} \right] \\ &= E_{\theta_1} \left[ \log \frac{\prod_{i=1}^{N_n} f(R_i, \theta_1) \sum_{\delta(N_n) \in \Delta(N_n)} \prod_{i=1}^{N_n} F^{\Delta_i}(R_i, \theta_1)}{\prod_{i=1}^{N_n} f(R_i, \theta_2) \sum_{\delta(N_n) \in \Delta(N_n)} \prod_{i=1}^{N_n} F^{\Delta_i}(R_i, \theta_2)} \right] \\ &= E_{\theta_1} \left[ \sum_{i=1}^{N_n} \log \frac{f(R_i, \theta_1)}{f(R_i, \theta_2)} \right] + E_{\theta_1} \left[ \log \frac{\sum_{\delta(N_n) \in \Delta(N_n)} \prod_{i=1}^{N_n} F^{\Delta_i}(R_i, \theta_1)}{\sum_{\delta(N_n) \in \Delta(N_n)} \prod_{i=1}^{N_n} F^{\Delta_i}(R_i, \theta_2)} \right] \quad (4.10) \end{aligned}$$

になる. ここで, (4.10) の最後の行の右辺の第 1 項は (4.2) より  $E_1$  に等しいので (4.5) によって求め, 第 2 項は十分小さい  $s$  に対して (4.3) と同様に考えれば,

$$I_R^U(n; \theta_1, \theta_2) = E_1^U + E_{\theta_1} \left[ \log \frac{A^U(\mathbf{R})}{B^U(\mathbf{R})} \right] \quad (4.11)$$

と表せる. ただし,

$$\begin{aligned} E_1^U &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} \right) F^i(x, \theta_1) f(x, \theta_1) dx, \\ A^U(r) &= \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - F(r_i, \theta_1)s}, \\ B^U(r) &= \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - F(r_i, \theta_2)s} \end{aligned}$$

とする. 下位の記録値については,  $E_1^L, A^L(r), B^L(r)$  として  $F$  を  $1 - F$  とおきかえたものを用いればよい. ここから, 情報量の値をシミュレーションによる数値計算によって求めることができる.

## 4.2 指数分布の場合の記録データの K-L 情報量

いま,  $X_1, \dots, X_n$  をたがいに独立にいずれも p.d.f.

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

をもつ指数分布  $\text{Exp}(1/\theta)$  に従う確率変数とする. ただし,  $\theta > 0$  とする. このとき,

$$\begin{aligned} \log \frac{f(x, \theta_1)}{f(x, \theta_2)} &= \log \frac{\theta_1 e^{-\theta_1 x}}{\theta_2 e^{-\theta_2 x}} = -\log \frac{\theta_2}{\theta_1} - (\theta_1 - \theta_2)x, \\ \log \frac{1 - F(x, \theta_1)}{1 - F(x, \theta_2)} &= \log \frac{e^{-\theta_1 x}}{e^{-\theta_2 x}} = -(\theta_1 - \theta_2)x \end{aligned}$$

となるので, (4.1) より最小の記録値のもつ K-L 情報量は,

$$I_M^L(n; \theta_1, \theta_2) = \int_0^\infty \left\{ -\log \frac{\theta_2}{\theta_1} - (\theta_1 - \theta_2)x - (n-1)(\theta_1 - \theta_2)x \right\} n e^{-(n-1)\theta_1 x} \theta_1 e^{-\theta_1 x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\log \frac{\theta_2}{\theta_1} - (\theta_1 - \theta_2) \int_0^\infty n^2 \theta_1 x e^{-n\theta_1 x} dx \\
&= -\log \frac{\theta_2}{\theta_1} - (\theta_1 - \theta_2) \cdot \frac{1}{\theta_1} \\
&=: -\log \lambda - (1 - \lambda)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

となる. ただし,  $\lambda := \theta_2/\theta_1$  とする. また, (4.9) より, 下位の記録値と記録時刻の組に対する K-L 情報量は,

$$\begin{aligned}
I_{RT}^L(n; \lambda) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} I_M^L(i; \lambda) \\
&= (-\log \lambda - (1 - \lambda)) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

となる. 次に, 上位の場合の K-L 情報量について考察すると,

$$\begin{aligned}
I_M^U(n; \theta_1, \theta_2) &= \int_0^\infty \left\{ -\log \frac{\theta_2}{\theta_1} - (\theta_1 - \theta_2)x - (n-1) \log \frac{1 - e^{-\theta_1 x}}{1 - e^{-\theta_2 x}} \right\} n(1 - e^{-\theta_1 x})^{n-1} \theta_1 e^{-\theta_1 x} dx \\
&= -\log \frac{\theta_2}{\theta_1} - (\theta_1 - \theta_2) \int_0^\infty x \cdot n(1 - e^{-\theta_1 x})^{n-1} \theta_1 e^{-\theta_1 x} dx \\
&\quad - (n-1) \int_0^\infty (-\log(1 - e^{-\theta_1 x})) \cdot n(1 - e^{-\theta_1 x})^{n-1} \theta_1 e^{-\theta_1 x} dx \\
&\quad + (n-1) \int_0^\infty (-\log(1 - e^{-\theta_2 x})) \cdot n(1 - e^{-\theta_1 x})^{n-1} \theta_1 e^{-\theta_1 x} dx \\
&= -\log \frac{\theta_2}{\theta_1} - (\theta_1 - \theta_2) \int_0^1 \left( -\frac{1}{\theta_1} \log(1-t) \right) \cdot nt^{n-1} dt - (n-1) \int_0^1 (-\log t) \cdot nt^{n-1} dt \\
&\quad + (n-1) \int_0^1 (-\log(1 - t^{\theta_2/\theta_1})) \cdot n(1-t)^{n-1} dt
\end{aligned}$$

となる. この第 2, 3, 4 項の積分はそれぞれ,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left( -\frac{1}{\theta_1} \log(1-t) \right) \cdot nt^{n-1} dt &= \frac{n}{\theta_1} \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i} \int_0^1 t^{n+i-1} dt \\
&= \frac{n}{\theta_1} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{1(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} + \cdots + \frac{1}{k(n+k)} \right\} \\
&= \frac{1}{\theta_1} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} - \cdots - \frac{1}{n+k} \right\} \\
&= \frac{1}{\theta_1} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (-\log t) \cdot nt^{n-1} dt &= \left[ -t^n \log t \right]_0^1 + \int_0^1 t^{n-1} dt \\
&= \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (-\log(1 - t^{\theta_2/\theta_1})) \cdot n(1-t)^{n-1} dt &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^1 t^{(\theta_2/\theta_1)k} \cdot n(1-t)^{n-1} dt \\
&= \frac{\theta_2}{\theta_1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 t^{(\theta_2/\theta_1)k-1} (1-t)^n dt \\
&= \frac{\theta_2}{\theta_1} \sum_{k=1}^{\infty} B\left(\frac{k\theta_2}{\theta_1}, n+1\right)
\end{aligned}$$

となる。ただし、 $B(\cdot, \cdot)$  はベータ関数とする。これより  $\lambda = \theta_2/\theta_1$  として、

$$I_M^U(n; \lambda) = -\log \lambda - (1-\lambda) \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \frac{n-1}{n} + \lambda(n-1) \sum_{k=1}^{\infty} B(k\lambda, n+1) \quad (4.14)$$

となる。さらに (4.9) より、

$$\begin{aligned}
I_{RT}^U(n; \lambda) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} I_M^U(i; \lambda) \\
&= -\log \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - (1-\lambda) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \frac{1}{j} - \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{i^2} + \lambda \sum_{i=1}^n (i-1) \sum_{k=1}^{\infty} B(k\lambda, i+1)
\end{aligned} \quad (4.15)$$

として上位の記録値と記録時刻の組  $(R, T)$  のもつ K-L 情報量が得られる。

最後に、記録値  $R$  のもつ K-L 情報量は

$$\begin{aligned}
E_1^L &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{\infty} \left( -\log \frac{\theta_2}{\theta_1} - (\theta_1 - \theta_2)x \right) e^{-i\theta_1 x} \theta_1 e^{-\theta_1 x} dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} \left( -\log \frac{\theta_2}{\theta_1} - (\theta_1 - \theta_2)x \right) \theta_1 e^{-i\theta_1 x} dx \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{i} \log \frac{\theta_2}{\theta_1} - \frac{1}{i^2 \theta_1} (\theta_1 - \theta_2) \right\} \\
&= -\log \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - (1-\lambda) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}, \\
E_1^U &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{\infty} \left( -\log \frac{\theta_2}{\theta_1} - (\theta_1 - \theta_2)x \right) (1 - e^{-\theta_1 x})^i \theta_1 e^{-\theta_1 x} dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^1 (-\log \lambda - (1-\lambda)(-\log(1-t))) t^{i-1} dt \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{i} \log \lambda - (1-\lambda) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(i+j)} \right\} \\
&= -\log \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - (1-\lambda) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \frac{1}{j}
\end{aligned} \quad (4.16)$$

となることから,

$$A^L(r) = \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - e^{-\theta_1 r_i} s},$$

$$B^L(r) = \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - e^{-\theta_2 r_i} s},$$

$$A^U(r) = \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - (1 - e^{-\theta_1 r_i}) s},$$

$$B^U(r) = \text{coefficient of } s^{n-m} \text{ in } \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - (1 - e^{-\theta_2 r_i}) s}$$

として, (4.11) からシミュレーションによりその情報量の値が得られる.

指数分布  $\text{Exp}(1/\theta)$  から得られた上位の最大の記録値に含まれる  $f(r_m, \theta_1)$  のもつ  $f(r_m, \theta_2)$  に関する K-L 情報量  $I_M^U(n; \lambda)$  の値, 同様に下位の最小の記録値に含まれる K-L 情報量の値  $I_M^L(n; \lambda)$  をそれぞれ示す (表 12, 13 参照). ただし,  $\lambda := \theta_2/\theta_1$  とする. また, 上位と下位それぞれの記録値と記録時刻の組のもつ K-L 情報量を繰り返し回数 200000 回によるシミュレーションにより求めた値を示す (表 14, 15 参照). さらに, 上位と下位それぞれの記録値のもつ K-L 情報量の値を示す (表 16, 17 参照). K-L 情報量の性質として, 標本の大きさ  $n$  が大きくなると情報量は増加すること,  $\theta_1 = \theta_2$  すなわち  $\lambda = 1$  のとき K-L 情報量は 0 となること, また,  $\theta_1$  と  $\theta_2$  に関して非対称であることが表から読みとれる. さらに, 表 14, 15 の記録値と記録時刻の組のもつ K-L 情報量の値は, 表 16, 17 の記録値の K-L 情報量よりもそれぞれ若干大きくなっていることがわかる. 記録時刻  $T$  の分布は母数  $\theta$  には依存しないことがわかっているが, 記録時刻を考慮した方が情報量の値が大きくなるという結果を得た. このことについて, 表 14 と表 16 の相対差を求めたものを表 18 に示す. 表 18 から記録時刻を考慮することによる情報量への影響は, 標本の大きさ  $n$  が大きくなるほど大きく, また  $\lambda$  の値が 1 に近いとき, すなわち 2 つの分布が非常に接近しているときほど大きくなることがわかる. また, 表 15 と表 17 の相対差を表 19 に示す. 上位のときと類似した結果が得られたが,  $\lambda > 1$  のときには  $\lambda$  の値を変えてもあまり変化がないという結果が得られた.

表 12  $\text{Exp}(1/\theta)$  から得られた最大の記録値に対する  $I_M^U(n; \lambda)$  の値

$\lambda$		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
$n$	1	3.62	2.93	2.05	1.40	0.81	0.19	0	0.31	2.39	6.70	16.00	45.09	94.39
	2	7.12	5.75	3.99	2.71	1.55	0.36	0	0.53	3.95	10.72	25.01	69.09	143.40
	3	10.54	8.50	5.86	3.96	2.24	0.51	0	0.72	5.10	13.54	31.27	85.25	176.23
	4	13.92	11.20	7.69	5.17	2.90	0.65	0	0.87	6.00	15.70	35.84	97.42	200.90
	5	17.25	13.85	9.47	6.34	3.53	0.78	0	1.00	6.74	17.45	39.59	107.17	220.65
	10	33.47	26.70	18.02	11.86	6.43	1.33	0	1.48	9.21	23.16	51.75	138.71	284.46
	20	64.69	51.20	33.99	21.93	11.50	2.21	0	2.04	11.83	29.13	64.41	171.43	350.62
	30	95.00	74.81	49.14	31.28	16.05	2.92	0	2.39	13.40	32.69	71.94	190.88	389.93
	40	124.73	97.87	63.78	40.20	20.28	3.55	0	2.66	14.53	35.23	77.32	204.76	418.00
	50	154.04	120.52	78.05	48.80	24.29	4.11	0	2.86	15.41	37.21	81.51	215.57	439.84
	75	226.04	175.90	112.59	69.33	33.63	5.33	0	3.25	17.01	40.82	89.14	235.27	479.64
	100	296.74	230.01	145.99	88.89	42.30	6.39	0	3.52	18.15	43.39	94.57	249.28	507.96

表 13:  $\text{Exp}(1/\theta)$  から得られた最小の記録値に対する  $I_M^L(n; \lambda)$  の値

		$\lambda$												
$n$		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
1	1	3.62	2.93	2.05	1.40	0.81	0.19	0	0.31	2.39	6.70	16.00	45.09	94.39
2	2	3.62	2.93	2.05	1.40	0.81	0.19	0	0.31	2.39	6.70	16.00	45.09	94.39
3	3	3.62	2.93	2.05	1.40	0.81	0.19	0	0.31	2.39	6.70	16.00	45.09	94.39
4	4	3.62	2.93	2.05	1.40	0.81	0.19	0	0.31	2.39	6.70	16.00	45.09	94.39
5	5	3.62	2.93	2.05	1.40	0.81	0.19	0	0.31	2.39	6.70	16.00	45.09	94.39
10	10	3.62	2.93	2.05	1.40	0.81	0.19	0	0.31	2.39	6.70	16.00	45.09	94.39
20	20	3.62	2.93	2.05	1.40	0.81	0.19	0	0.31	2.39	6.70	16.00	45.09	94.39
30	30	3.62	2.93	2.05	1.40	0.81	0.19	0	0.31	2.39	6.70	16.00	45.09	94.39
40	40	3.62	2.93	2.05	1.40	0.81	0.19	0	0.31	2.39	6.70	16.00	45.09	94.39
50	50	3.62	2.93	2.05	1.40	0.81	0.19	0	0.31	2.39	6.70	16.00	45.09	94.39
75	75	3.62	2.93	2.05	1.40	0.81	0.19	0	0.31	2.39	6.70	16.00	45.09	94.39
100	100	3.62	2.93	2.05	1.40	0.81	0.19	0	0.31	2.39	6.70	16.00	45.09	94.39

表 14:  $\text{Exp}(1/\theta)$  から得られた記録値と記録時刻の組に対する  $I_{RT}^U(n; \lambda)$  の値

		$\lambda$												
$n$		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
1	1	3.62	2.93	2.05	1.40	0.81	0.19	0	0.31	2.39	6.70	16.00	45.09	94.39
2	2	7.17	5.81	4.04	2.76	1.58	0.37	0	0.57	4.37	12.06	28.51	79.63	166.09
3	3	10.69	8.64	5.99	4.08	2.33	0.54	0	0.81	6.07	16.57	38.90	108.05	224.84
4	4	14.17	11.44	7.92	5.37	3.05	0.70	0	1.03	7.57	20.49	47.86	132.41	275.06
5	5	17.62	14.21	9.81	6.64	3.76	0.86	0	1.23	8.91	23.98	55.78	153.84	319.19
10	10	34.54	27.74	18.98	12.72	7.08	1.57	0	2.06	14.22	37.47	86.07	235.31	486.50
20	20	67.33	53.78	36.38	24.04	13.10	2.76	0	3.25	21.35	55.16	125.35	340.15	701.16
30	30	99.28	79.00	53.02	34.69	18.62	3.79	0	4.14	26.39	67.51	152.59	412.50	849.04
40	40	130.67	103.66	69.15	44.90	23.81	4.71	0	4.86	30.37	77.17	173.83	468.80	963.98
50	50	161.64	127.92	84.90	54.78	28.76	5.56	0	5.47	33.68	85.19	191.40	515.29	1058.87
75	75	237.73	187.28	123.10	78.46	40.38	7.46	0	6.70	40.21	100.91	225.77	606.10	1244.08
100	100	312.44	245.29	160.07	101.09	51.24	9.14	0	7.67	45.25	112.96	252.08	675.48	1385.48

表 15:  $\text{Exp}(1/\theta)$  から得られた記録値と記録時刻の組に対する  $I_{RT}^L(n; \lambda)$  の値

		$\lambda$												
$n$		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
	1	3.62	2.93	2.05	1.40	0.81	0.19	0	0.31	2.39	6.70	16.00	45.09	94.39
	2	5.42	4.40	3.07	2.10	1.21	0.29	0	0.46	3.59	10.05	24.01	67.63	141.59
	3	6.63	5.38	3.75	2.57	1.48	0.35	0	0.56	4.38	12.28	29.34	82.66	173.06
	4	7.53	6.11	4.26	2.92	1.69	0.40	0	0.64	4.98	13.95	33.34	93.93	196.66
	5	8.25	6.69	4.67	3.20	1.85	0.44	0	0.70	5.46	15.29	36.54	102.95	215.54
	10	10.59	8.59	5.99	4.11	2.37	0.57	0	0.90	7.00	19.62	46.88	132.06	276.48
	20	13.01	10.55	7.36	5.05	2.91	0.69	0	1.10	8.60	24.10	57.58	162.22	339.61
	30	14.44	11.71	8.17	5.60	3.23	0.77	0	1.23	9.55	26.76	63.94	180.13	377.11
	40	15.47	12.54	8.75	6.00	3.46	0.83	0	1.31	10.23	28.66	68.47	192.91	403.87
	50	16.27	13.19	9.20	6.31	3.64	0.87	0	1.38	10.76	30.13	72.01	202.86	424.70
	75	17.72	14.37	10.03	6.87	3.97	0.95	0	1.50	11.72	32.83	78.44	220.99	462.66
	100	18.75	15.21	10.61	7.28	4.20	1.00	0	1.59	12.40	34.74	83.02	233.89	489.66

表 16:  $\text{Exp}(1/\theta)$  から得られた記録値に対する  $I_R^U(n; \lambda)$  の値

		$\lambda$												
$n$		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
1		3.62	2.93	2.05	1.40	0.81	0.19	0	0.31	2.39	6.70	16.00	45.09	94.39
2		7.18	5.80	4.04	2.76	1.58	0.37	0	0.57	4.37	12.05	28.51	79.63	166.09
3		10.69	8.63	5.98	4.07	2.32	0.54	0	0.81	6.05	16.54	38.86	108.00	224.79
4		14.14	11.40	7.88	5.34	3.03	0.70	0	1.02	7.52	20.42	47.77	132.30	274.94
5		17.55	14.14	9.75	6.59	3.72	0.85	0	1.21	8.83	23.86	55.62	153.66	319.00
10		34.17	27.39	18.67	12.44	6.89	1.50	0	1.98	13.94	37.07	85.60	234.79	485.96
20		65.99	52.49	35.22	23.03	12.37	2.55	0	3.04	20.66	54.26	124.33	339.06	700.03
30		96.75	76.53	50.75	32.75	17.22	3.39	0	3.80	25.38	66.20	151.12	410.94	847.44
40		126.83	99.94	65.73	41.95	21.68	4.11	0	4.40	29.07	75.51	171.99	466.84	961.99
50		156.42	122.87	80.29	50.78	25.88	4.77	0	4.90	32.12	83.22	189.22	512.99	1056.53
75		229.04	178.78	115.27	71.82	35.63	6.16	0	5.89	38.11	98.31	222.93	603.10	1241.03
100		300.16	233.37	149.22	91.74	44.59	7.34	0	6.66	42.70	109.87	248.68	671.90	1381.84

表 17:  $\text{Exp}(1/\theta)$  から得られた記録値に対する  $I_R^L(n; \lambda)$  の値

		$\lambda$												
$n$		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
1		3.62	2.93	2.05	1.40	0.81	0.19	0	0.31	2.39	6.70	16.00	45.09	94.39
2		5.42	4.40	3.07	2.10	1.22	0.29	0	0.46	3.59	10.05	23.99	67.65	141.65
3		6.58	5.33	3.71	2.53	1.45	0.34	0	0.54	4.18	11.69	27.94	78.78	164.91
4		7.42	5.99	4.16	2.83	1.62	0.38	0	0.59	4.54	12.70	30.30	85.63	179.35
5		8.07	6.51	4.50	3.06	1.74	0.41	0	0.62	4.80	13.37	31.93	90.11	188.86
10		10.06	8.07	5.52	3.71	2.08	0.47	0	0.71	5.38	14.97	35.73	100.85	211.76
20		11.90	9.48	6.40	4.24	2.35	0.53	0	0.76	5.76	15.96	38.00	107.53	226.17
30		12.88	10.22	6.84	4.51	2.48	0.55	0	0.78	5.88	16.28	38.86	109.73	231.19
40		13.53	10.69	7.13	4.66	2.55	0.56	0	0.79	5.92	16.44	39.24	110.99	233.44
50		14.00	11.03	7.31	4.78	2.59	0.57	0	0.80	6.00	16.56	39.48	111.65	235.40
75		14.79	11.59	7.63	4.94	2.67	0.58	0	0.81	6.06	16.77	39.88	113.07	237.94
100		15.29	11.94	7.81	5.04	2.73	0.59	0	0.82	6.08	16.80	40.18	113.79	239.19

表 18:  $\text{Exp}(1/\theta)$  から得られた上位の記録データに対する相対差  $(I_{RT}^U(n; \lambda) - I_R^U(n; \lambda)) / I_R^U(n; \lambda)$  の値

		$\lambda$												
$n$		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
1		.000	.000	.000	.000	.000	.000	—	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2		.000	.001	.000	.001	.000	.000	—	.002	.000	.000	.000	.000	.000
3		.000	.002	.001	.003	.003	.006	—	.004	.003	.002	.001	.000	.000
4		.002	.003	.005	.006	.007	.008	—	.009	.006	.004	.002	.001	.000
5		.004	.005	.006	.008	.010	.015	—	.015	.009	.005	.003	.001	.001
10		.011	.012	.017	.022	.029	.042	—	.038	.020	.011	.006	.002	.001
20		.020	.025	.033	.044	.059	.084	—	.069	.033	.017	.008	.003	.002
30		.026	.032	.045	.059	.081	.118	—	.089	.040	.020	.010	.004	.002
40		.030	.037	.052	.070	.098	.146	—	.103	.045	.022	.011	.004	.002
50		.033	.041	.057	.079	.111	.166	—	.115	.049	.024	.011	.004	.002
75		.037	.048	.068	.093	.133	.212	—	.137	.055	.026	.013	.005	.002
100		.041	.051	.072	.102	.149	.245	—	.152	.060	.028	.014	.005	.003

表 19:  $\text{Exp}(1/\theta)$  から得られた下位の記録データに対する相対差  $(I_{RT}^L(n; \lambda) - I_R^L(n; \lambda))/I_R^L(n; \lambda)$  の値

$\lambda$		0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
$n$	1	.000	.000	.000	.000	.000	.000	—	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.000	.001	.000	.000	.001	.000	—	-.003	.000	.000	-.001	.000	.000
	3	.007	.009	.012	.011	.021	.028	—	.049	.049	.050	.050	.049	.049
	4	.016	.019	.025	.032	.042	.057	—	.084	.097	.098	.100	.097	.096
	5	.023	.028	.037	.047	.061	.085	—	.124	.138	.144	.145	.143	.141
	10	.053	.064	.085	.108	.139	.192	—	.272	.301	.311	.312	.309	.306
	20	.093	.112	.150	.190	.239	.318	—	.448	.493	.510	.515	.509	.502
	30	.121	.146	.195	.243	.306	.410	—	.570	.623	.644	.645	.642	.631
	40	.143	.173	.228	.287	.358	.467	—	.653	.727	.743	.745	.738	.730
	50	.162	.196	.259	.319	.402	.517	—	.727	.793	.819	.824	.817	.804
	75	.198	.240	.314	.391	.484	.623	—	.860	.934	.957	.967	.955	.944
	100	.227	.274	.359	.444	.540	.687	—	.952	1.038	1.068	1.066	1.055	1.047

## 5 結合分布の場合の記録データに関する K-L 情報量

第 4 節において, 2 つの分布の識別を記録値に関する K-L 情報量を用いて考察したが, もっと明確にするために, 2 つの分布を結合させて考える. 本節では指数分布と正規分布の結合分布に対する指数分布の識別をするために記録値に関する K-L 情報量について検討する.

まず, 平均 1 の指数分布  $\text{Exp}(1)$  の p.d.f. を  $f_1$  とし, ある任意の正数  $c$  より小さい区間では  $\text{Exp}(1)$  で,  $c$  以上の区間では正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  となるように結合させた分布の p.d.f. を  $f_2$ , すなわち,

$$f_2(x) = \begin{cases} e^{-x} & (0 \leq x < c), \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & (x \geq c), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を考える. ただし,  $\mu, \sigma$  は,

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) = e^{-c}, \\ \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) = 1 - e^{-c} \end{cases}$$

より  $c$  の関数として定まるものとし,  $\Phi, \phi$  はそれぞれ  $N(0, 1)$  の c.d.f., p.d.f. とする. このとき, 結合点  $c$  の値を変えながら記録データに関する K-L 情報量の挙動を調べる. そこで,  $c$  が p.d.f.  $f_2$  をもつ分布の中央値になる場合, すなわち,  $c = \log 2$  の場合に,  $f_2$  に対する  $f_1$  の記録データに関する K-L 情報量を求める (図 1, 表 20 参照). 表 20 より, 上位の記録データに関する K-L 情報量は標本の大きさ  $n$  が大きくなるにつれて増加し, その情報量損失は小さいように見える. 一方, 最小の記録値に関する K-L 情報量は  $n$  が大きくなると著しく減少する傾向が読みとれ, このことは,  $n$  が増加すればするほど最小の記録値は  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  の重複部分からデータが得られる可能性が高く, どちらの分布から得られたのか識別が困難になるためと考えられる. また, 下位の記録値と記録時刻の組に関する K-L 情報量は, (4.9) より, 最小の記録値の和の形で表されるため, 減少することはないが, 最小の記録値に関する K-L 情報量が著しく減少しているため,  $n$  が大きくなっても次第に増加しなくなる傾向が見られた. さらに, 下位の記録値に関する K-L 情報量も  $n$  が大きくなるにつ

れて減少しているが、これは表 19 で見たように、 $n$  が大きくなると記録時刻を含めて K-L 情報量を考慮する影響が大きくなるということが表れていると考えられる。

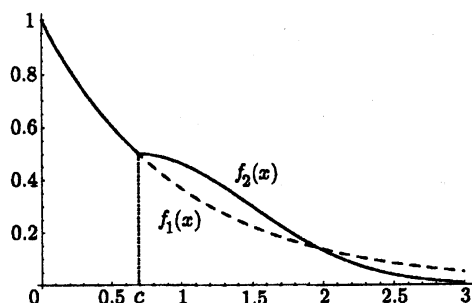


図 1:  $f_1(x)$ (点線) と  $f_2(x)$ (実線) ( $c = \log 2 \approx 0.693$ )

表 20:  $f_2$  に対する  $f_1$  の記録データに関する情報量の値 ( $c = \log 2$ )

$n$	$I_X$	$I_M^L$	$I_{RT}^L$	$I_R^L$	$I_M^U$	$I_{RT}^U$	$I_R^U$
1	0.285	0.285	0.285	0.285	0.285	0.285	0.285
2	0.571	0.045	0.308	0.308	0.557	0.564	0.564
3	0.856	0.011	0.312	0.300	0.817	0.836	0.836
4	1.142	0.001	0.313	0.297	1.068	1.103	1.103
5	1.427	0.000	0.313	0.295	1.310	1.365	1.365
10	2.854	0.000	0.313	0.294	2.412	2.611	2.606
20	5.708	0.000	0.313	0.293	4.218	4.847	4.830
30	8.562	0.000	0.313	0.293	5.662	6.829	6.788

次に、この  $c$  の値を変えて同様の考察を行う。まず、 $f_1$  と  $f_2$  の相異部分が多い  $c = 0.1$  の場合について記録データのもつ K-L 情報量を求める (図 2, 表 21 参照)。この場合にも、表 20 と同様の傾向がみられるが、分布の相異部分が多いことから全体的に情報量の値は大きくなっている。また、最小の記録値に関する K-L 情報量の減少のスピードも表 20 の場合に比べて遅くなっている。

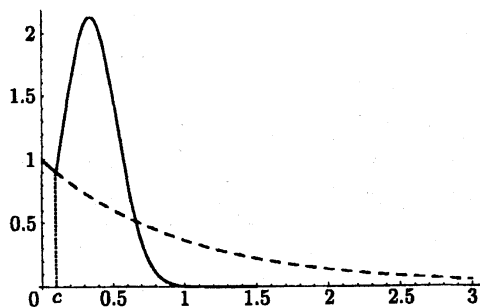


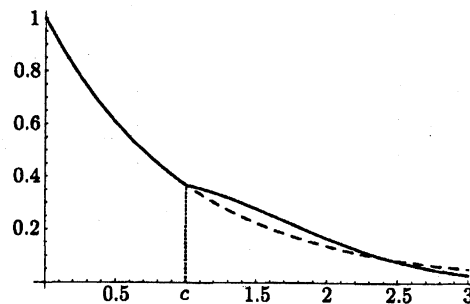
図 2:  $f_1(x)$ (点線) と  $f_2(x)$ (実線) ( $c = 0.1$ )



表 21:  $f_2$  に対する  $f_1$  の記録データに関する情報量の値 ( $c = 0.1$ )

$n$	$I_X$	$I_M^L$	$I_{RT}^L$	$I_R^L$	$I_M^U$	$I_{RT}^U$	$I_R^U$
1	18.627	18.627	18.627	18.627	18.627	18.627	18.627
2	37.253	6.665	21.959	21.946	34.343	35.798	35.798
3	55.880	3.318	23.065	21.915	47.970	51.788	51.781
4	74.506	1.911	23.543	21.591	60.012	66.791	66.775
5	93.133	1.199	23.782	21.315	70.817	80.955	80.922
10	186.265	0.214	24.096	20.761	113.010	142.495	142.322
20	372.530	0.021	24.148	20.563	168.749	237.938	237.434
30	558.796	0.004	24.152	20.529	207.759	313.359	312.545

また,  $f_1$  と  $f_2$  の相異が比較的少ない  $c = 1$  の場合に, 同様の考察を行う (図 3, 表 22 参照). この場合には, 2つの分布の相異が比較的少ないため2つの分布の識別が難しくなることから, 全体的に情報量の値が小さくなっている. そして,  $f_1$  と  $f_2$  の相異が上位の部分にしかないことから, 上位の記録値と記録時刻の組のもつ K-L 情報量に対して, 最大の記録値のもつ K-L 情報量の情報量損失は小さくなっている. さらに, 最小の記録値に関する K-L 情報量の減少のスピードは, 表 20 の場合に比べて速くなっていることがわかる.

図 3:  $f_1(x)$ (点線) と  $f_2(x)$ (実線) ( $c = 1$ )表 22:  $f_2$  に対する  $f_1$  の記録データに関する情報量の値 ( $c = 1$ )

$n$	$I_X$	$I_M^L$	$I_{RT}^L$	$I_R^L$	$I_M^U$	$I_{RT}^U$	$I_R^U$
1	0.104	0.104	0.104	0.104	0.104	0.104	0.104
2	0.208	0.012	0.110	0.110	0.204	0.206	0.206
3	0.312	0.002	0.110	0.107	0.302	0.307	0.307
4	0.415	0.000	0.111	0.106	0.397	0.406	0.406
5	0.519	0.000	0.111	0.106	0.490	0.504	0.504
10	1.039	0.000	0.111	0.106	0.926	0.977	0.976
20	2.077	0.000	0.111	0.106	1.692	1.857	1.852
30	3.116	0.000	0.111	0.106	2.349	2.668	2.656

さらに, 平均  $\lambda$  の指数分布  $\text{Exp}(\lambda)$  の p.d.f. を  $f_1$  とし, ある正数  $c$  より小さい区間では  $\text{Exp}(\lambda)$  で  $c$  以上の区間では正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  となるように結合させた分布の p.d.f. を  $f_2$  とする, すなわち

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} & (0 \leq x < c), \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & (x \geq c), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とする. このとき,  $0 < \alpha < 1$  について

$$\alpha = \int_0^c f_1(x) dx = \int_0^c \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} dx$$

とすると,  $c = -\lambda \log(1 - \alpha)$  になり,  $c$  は  $\lambda$  に依存する. また,  $k > 0$  について

$$k\alpha = \int_c^\infty f_2(x) dx = \int_c^\infty \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx = \Phi\left(\frac{\lambda \log(1 - \alpha) + \mu}{\sigma}\right) \quad (5.1)$$

とし,

$$f_1(-\lambda \log(1 - \alpha)) = f_2(-\lambda \log(1 - \alpha))$$

とすれば,

$$\frac{1 - \alpha}{\lambda} = \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{\lambda \log(1 - \alpha) + \mu}{\sigma}\right) \quad (5.2)$$

となる. ここで, (5.1), (5.2) をみたすように  $\mu, \sigma$  を定めると, これらは  $\lambda$  に依存する. そこで,  $\alpha, k$  の値を予め定めて,  $\lambda$  の値, すなわち  $c$  の値をいろいろ動かしてみると,  $f_2$  に対する  $f_1$  の記録データに関する K-L 情報量は数値的に変化しないことが分かる. このことは, その情報量が結合点  $c$  によって分割された  $f_2$  の面積比に起因すると考えられ, 十分な解明が求められる.

## 6 応用例

この節では, 気象データを用いて実際に記録データから得られる情報量について数値的に考察を行う. 気象庁ホームページ (<http://www.jma.go.jp/>) による日別降水量データのヒストグラムについて, 最尤推定量を用いた指数分布の当てはめがよいと思われる (図 4 参照).

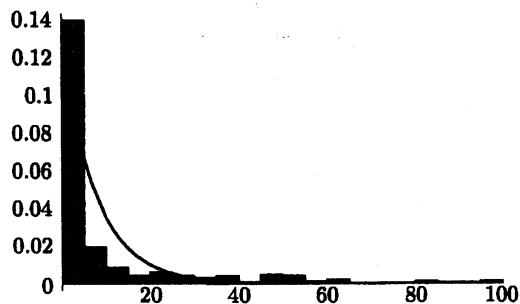


図 4: 東京の降水量データのヒストグラムと指数分布の当てはめ

そこで、いま降水量データがたがいに独立にいずれも  $\text{Exp}(1/\theta)$  に従うと仮定し、そこから得られる記録データのもつ情報量の解析を行う。また、指数分布  $\text{Exp}(1/\theta)$  に従う確率変数  $X_1, \dots, X_n$  の和  $X_1 + \dots + X_n$  はガンマ分布  $G(n, 1/\theta)$  に従うことから、月間降水量はガンマ分布への当てはめがよいと考えられる。以上のことを前提として、月間降水量データから得られる記録データの F 情報量、日別降水量データから得られる記録データのもつ K-L 情報量について考察する。

### 6.1 月間降水量から得られる記録データのもつ F 情報量

次は、札幌 (S)、東京 (T)、那覇 (N) の 3 地点を用いて、それぞれの観測開始年である 1961 年から 2003 年までの 6 月の月間降水量のデータ (標本の大きさ  $n = 43$ , 単位: mm) である。

$S = \{32.8, 55.8, 84.3, 158.6, 46.1, 96.3, 123.2, 38.0, 102.0, 95.5, 81.5, 87.0, 13.0, 101.5, 67.0, 78.5, 7.5, 91.5, 48.0, 125.5, 50.0, 52.5, 59.0, 38.0, 9.0, 23.5, 17.0, 79.5, 91.0, 37.5, 28.0, 25.5, 73.5, 5.5, 35.0, 29.0, 21.0, 83.0, 32.5, 50.5, 42.0, 64.5, 68.5\},$

$T = \{305.5, 244.5, 248.2, 139.9, 219.5, 510.2, 109.3, 175.0, 187.5, 218.0, 91.5, 107.0, 121.5, 204.5, 106.5, 186.0, 202.5, 104.0, 63.0, 172.5, 103.0, 224.5, 198.0, 202.0, 381.0, 138.0, 120.5, 198.0, 205.0, 68.0, 142.0, 237.0, 260.0, 144.5, 185.5, 36.0, 170.5, 150.5, 192.5, 232.0, 144.5, 151.5, 85.0\},$

$N = \{101.1, 239.0, 75.2, 439.3, 515.9, 355.0, 472.0, 256.5, 602.5, 211.5, 180.0, 340.5, 168.0, 240.0, 527.5, 188.0, 289.0, 250.0, 228.0, 20.0, 43.0, 269.0, 161.0, 97.5, 181.0, 120.5, 430.5, 162.5, 159.0, 310.0, 43.5, 292.0, 113.0, 139.0, 269.5, 103.0, 334.5, 379.5, 123.5, 186.5, 151.5, 290.5, 222.0\}.$

これらの観測値から得られる上位 (下位) の記録値および記録時刻は

$$\begin{aligned} R_S^U &= \{32.8, 55.8, 84.3, 158.6\}, & T_S^U &= \{1, 2, 3, 4\}, \\ R_S^L &= \{32.8, 13.0, 7.5, 5.5\}, & T_S^L &= \{1, 13, 17, 34\}, \\ R_T^U &= \{305.5, 510.2\}, & T_T^U &= \{1, 6\}, \\ R_T^L &= \{305.5, 244.5, 139.9, 109.3, 91.5, 63.0, 36.0\}, & T_T^L &= \{1, 2, 4, 7, 11, 19, 36\}, \\ R_N^U &= \{101.1, 239.0, 439.3, 515.9, 602.5\}, & T_N^U &= \{1, 2, 4, 5, 9\}, \\ R_N^L &= \{101.1, 75.2, 20.0\}, & T_N^L &= \{1, 3, 20\} \end{aligned}$$

となる。ただし上から順に、上位の札幌、下位の札幌、上位の東京、下位の東京、上位の那覇、下位の那覇の記録データであり、左側が記録値、右側が記録時刻の値を示している。

さて、これらの記録データのもつ F 情報量の値を考察したい。いま、月間降水量のデータは、たがいに独立にいずれもガンマ分布  $G(\alpha, 1/\beta)$  に従うものとする。確率変数  $X$  が  $G(\alpha, 1/\beta)$  に従うとき、

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad V(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

より、

$$\beta = \frac{E(X)}{V(X)}, \quad \alpha = \beta E(X)$$

となるので,  $\beta, \alpha$  のそれぞれの推定量として,

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{S^2}, \quad \hat{\alpha} = \hat{\beta} \bar{X}$$

をとる. ただし,  $\bar{X} = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $S^2 = (1/(n-1)) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  とする. ここで  $\alpha, \beta$  の代わりに, それぞれ  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  を用いて, 月間降水量データのヒストグラムにガンマ分布の当てはめを行う (図 5 参照).

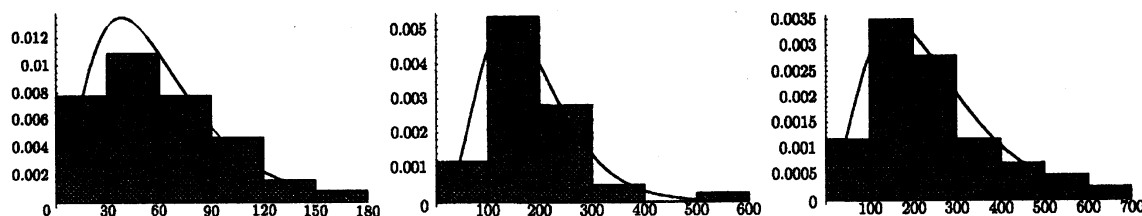


図 5: 月間降水量のヒストグラムとガンマ分布の当てはめ (左: 札幌, 中央: 東京, 右: 那覇)

さらに,  $\hat{\alpha}$  を用いて,  $\alpha$  が既知のときの尺度母数  $\beta$  に関する記録データのもつ F 情報量を求める.  $G(\alpha, 1/\beta)$  に関する記録データのもつ F 情報量は, (3.8), (3.10) ~ (3.13) により得られていたから, 札幌, 東京, 那覇それぞれの記録データに関して数値計算を行うと表 23 が得られる.

表 23: 札幌, 東京, 那覇の記録データのもつ情報量の値 ( $n = 43$ )

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\beta^2 I_X(\beta)$	$\beta^2 I_M^L(n)$	$\beta^2 I_{RT}^L(n)$	$\beta^2 I_R^L(n)$	$\beta^2 I_M^U(n)$	$\beta^2 I_{RT}^U(n)$	$\beta^2 I_R^U(n)$
札幌	2.82	0.05	121.37	5.82	18.03	12.00	27.71	47.68	40.38
東京	4.45	0.02	191.18	11.33	31.99	21.89	39.18	69.80	57.01
那覇	3.01	0.01	129.44	6.42	19.59	13.23	29.08	50.29	42.19

さらに, 各地点の情報量を  $\hat{\beta}$  を用いて, 数値的に比較すれば表 24 のようになり, これから上位および下位の記録値の情報量損失  $I_X(\beta) - I^U(n)$ ,  $I_X(\beta) - I^L(n)$  の近似値が得られ, 上位の方が下位よりも記録値の情報量損失が少ないことがわかる.

表 24: 札幌, 東京, 那覇の降水量の記録データのもつ情報量の数値比較 ( $n = 43$ )

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$I_X(\beta)$	$I_M^L(n)$	$I_{RT}^L(n)$	$I_R^L(n)$	$I_M^U(n)$	$I_{RT}^U(n)$	$I_R^U(n)$
札幌	2.82	0.05	53539.5	2832.6	8643.3	5295.0	12827.7	22186.0	17812.3
東京	4.45	0.02	309007.0	10378.5	31668.8	35384.8	47000.3	81288.5	92150.5
那覇	3.01	0.01	816612.0	40510.9	123614.0	83461.5	183458.0	317296.0	266156.0

いま, 実際に F 情報量を求めたが, 記録データの情報量は情報量損失をおこすため, この情報量の推定論, 検定論等の統計的推測理論への応用は難しいように考えられる. また, 表 24 からは各記録データの情報量が札幌, 東京, 那覇の順で大きくなっていることが読みとれるが, このような 2 地点での比較に関する情報量は K-L 情報量を用いるほうがよい. そこで, これらの降水量データに関する K-L 情報量による解析を行う.

## 6.2 日別降水量から得られる記録データのもつ K-L 情報量

次に, 日別降水量のデータに関してその記録データのもつ K-L 情報量について考察する. 6.1 節と同様に, 札幌 (S), 東京 (T), 那覇 (N) の 3 地点を選び, ここでは特に 6 月 23 日から 6 月 25 日の 3 日間の降水量データに注目し, そのデータの解析を行う. 1961 年から 2003 年までの降水量データ (標本の大きさ  $n = 43$ , 単位: mm) は, まず, 6 月 23 日に関しては,



$$T_{6/24} = \{21.0, 21.3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 17.5, 1.5, 29.5, 24.0, 9.0, 0, 4.5, 0, 23.0, 25.5, 0, 11.0, 0, 0, 16.5, 22.0, 0, 41.0, 52.0, 4.0, 0, 0, 4.0, 0, 0, 0.5, 38.0, 0, 0, 5.0\},$$

$$N_{6/24} = \{0.1, 0, 0.2, 8.6, 0.2, 0, 5.6, 21.5, 40.0, 0, 2.0, 0, 1.0, 4.0, 0, 0, 19.5, 0, 0, 0, 0, 6.0, 0, 0.5, 0, 0, 38.5, 2.0, 0, 0, 3.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1.5, 0, 0\}$$

となり, ここから得られる記録データは,

$$\begin{aligned} R_{S_{6/24}}^U &= \{6.6, 8.5, 10.0\}, & T_{S_{6/24}}^U &= \{1, 20, 39\}, \\ R_{S_{6/24}}^L &= \{6.6, 0.2, 0.1, 0\}, & T_{S_{6/24}}^L &= \{1, 2, 5, 7\}, \\ R_{T_{6/24}}^U &= \{21.0, 21.3, 29.5, 41.0, 52.0\}, & T_{T_{6/24}}^U &= \{1, 2, 16, 31, 32\}, \\ R_{T_{6/24}}^L &= \{21.0, 0\}, & T_{T_{6/24}}^L &= \{1, 3\}, \\ R_{N_{6/24}}^U &= \{0.1, 0.2, 8.6, 21.5, 40.0\}, & T_{N_{6/24}}^U &= \{1, 3, 4, 8, 9\}, \\ R_{N_{6/24}}^L &= \{0.1, 0\}, & T_{N_{6/24}}^L &= \{1, 2\} \end{aligned}$$

となる. これより, 記録データのもつ K-L 情報量は表 26 のように得られる.

表 26: 6 月 24 日の降水量データによる記録データの K-L 情報量 ( $n = 43$ )

	$I_X(\lambda)$	$I_M^L(n; \lambda)$	$I_{RT}^L(n; \lambda)$	$I_R^L(n; \lambda)$	$I_M^U(n; \lambda)$	$I_{RT}^U(n; \lambda)$	$I_R^U(n; \lambda)$
札幌 → 那覇	29.07	0.68	2.94	2.12	17.37	20.55	18.47
東京 → 那覇	22.48	0.52	2.27	1.37	4.21	8.15	7.46

この表から, 6 月 23 日から 1 日変わるだけで降水量の分布は大きく変化し, 東京の分布に近かった那覇の分布が札幌の分布に近づいていき, どちらの分布からみても, その識別のための情報量は大差がなくなっていることが伺える. 一方, 1969 年の那覇の降水量データを調べてみると, 沖縄地方の梅雨明けは 6 月 29 日と遅く, また平年梅雨の期間の沖縄地方の降水量は 300~500mm 程度がほとんどであるが, この年の沖縄地方は 1122.5mm を記録している. これは, 6.1 節で述べた月間降水量データからも 1969 年の那覇の雨量の多さが読みとれる. このことから, 上位の記録データに関しては大雨が降ることがほとんどない札幌との識別がしやすくなり, 東京と比べてその情報量が大きくなっている.

さらに同様に, その 1 日後の 6 月 25 日における降水量データから得られる記録データの情報量解析を行う. 6 月 25 日の降水量データ (単位: mm) は,

$$S_{6/25} = \{3.8, 0, 0, 0, 0, 5.2, 0, 0, 0, 0, 1.0, 0, 2.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4.0, 9.5, 0, 0, 0, 0, 0, 2.0, 5.5, 0, 0, 1.0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5, 0, 0, 0, 0\},$$

$$T_{6/25} = \{26.1, 35.0, 0, 2.8, 0, 0, 4.0, 11.5, 9.0, 8.5, 0, 0, 0, 0, 4.5, 48.5, 47.5, 3.0, 0, 0, 1.0, 0, 2.5, 6.0, 28.0, 6.0, 0, 23.5, 0, 0, 0, 0, 3.5, 5.0, 5.5, 0, 0.5, 16.5, 5.0, 0, 6.5, 20.0\},$$

$$N_{6/25} = \{1.4, 8.6, 0, 0, 0.3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3.0, 12.5, 0, 1.0, 16.0, 0, 0, 0, 0, 0.5, 0, 0, 0, 0, 20.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2.0, 1.5, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

となり、ここから得られる記録データは、

$$\begin{aligned}
 R_{S_{6/25}}^U &= \{3.8, 5.2, 9.5\}, & T_{S_{6/25}}^U &= \{1, 6, 23\}, \\
 R_{S_{6/25}}^L &= \{3.8, 0\}, & T_{S_{6/25}}^L &= \{1, 2\}, \\
 R_{T_{6/25}}^U &= \{26.1, 35.0, 48.5\}, & T_{T_{6/25}}^U &= \{1, 2, 16\}, \\
 R_{T_{6/25}}^L &= \{26.1, 0\}, & T_{T_{6/25}}^L &= \{1, 3\}, \\
 R_{N_{6/25}}^U &= \{1.4, 8.6, 12.5, 16.0, 20.5\}, & T_{N_{6/25}}^U &= \{1, 2, 14, 17, 28\}, \\
 R_{N_{6/25}}^L &= \{1.4, 0\}, & T_{N_{6/25}}^L &= \{1, 3\}
 \end{aligned}$$

となる。これより、記録データのもつ K-L 情報量は表 27 のように得られる。

表 27: 6 月 25 日の降水量データによる記録データの K-L 情報量 ( $n = 43$ )

	$I_X(\lambda)$	$I_M^L(n; \lambda)$	$I_{RT}^L(n; \lambda)$	$I_R^L(n; \lambda)$	$I_M^U(n; \lambda)$	$I_{RT}^U(n; \lambda)$	$I_R^U(n; \lambda)$
札幌 → 那覇	7.48	0.17	0.76	0.50	3.22	4.43	3.85
東京 → 那覇	99.43	2.31	10.06	5.73	14.45	30.50	29.10

この表からわかるように、札幌の記録データのもつ那覇の記録データに関する K-L 情報量は小さくなり、逆に東京のもつ那覇に関する情報量が大きくなっている。表 25-27 から、1 日変わるだけでもその降水量データの分布の変動は大きく、たった 2 日間で雨の多い地方 (東京) から雨の少ない地方 (札幌) の分布へ近づいていることが K-L 情報量を用いた解析により読みとれた。

さて、ここまでの例では、各々の月日の札幌 → 那覇、東京 → 那覇の情報量の大小関係が、全標本から得られる情報量、上位の記録データから得られる情報量、下位の記録データから得られる情報量のそれぞれの項目で逆転することはなかったが、その関係が崩れる例を示す。次は、1961 年から 2002 年度まで (標本の大きさ  $n = 42$ ) の 12 月 11 日における降水量データから得られる記録データである。まず、各地の降水量データ (単位: mm) は、

$$S_{12/11} = \{1.0, 10.0, 0.1, 0.9, 0, 11.3, 4.0, 0, 8.0, 0, 9.5, 0, 0, 0.5, 0, 6.0, 0.5, 4.5, 5.0, 0, 0, 11.5, 17.0, 0, 6.0, 3.0, 4.5, 11.0, 1.5, 26.5, 4.0, 9.0, 9.5, 0, 0, 0, 1.0, 7.5, 5.5, 0.5, 21.5, 0\},$$

$$T_{12/11} = \{0, 0, 0, 0, 7.0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 6.5, 0, 0, 0, 0, 0, 34.5, 0, 0, 0, 0, 0, 20.0, 0, 0, 6.5, 2.0, 0, 5.0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$$

$$N_{12/11} = \{2.0, 0, 3.7, 1.1, 11.2, 0, 0.5, 7.0, 0, 3.0, 4.0, 0, 0.5, 17.5, 3.0, 0, 4.0, 0, 0, 0, 0, 40.0, 2.0, 0, 9.5, 0, 17.0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2.0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

となり、ここから得られる記録データは、

$$\begin{aligned}
 R_{S_{12/11}}^U &= \{1.0, 10.0, 11.3, 11.5, 17.0, 26.5\}, & T_{S_{12/11}}^U &= \{1, 2, 6, 22, 23, 30\}, \\
 R_{S_{12/11}}^L &= \{1.0, 0.1, 0\}, & T_{S_{12/11}}^L &= \{1, 3, 5\}, \\
 R_{T_{12/11}}^U &= \{0, 7.0, 34.5\}, & T_{T_{12/11}}^U &= \{1, 5, 24\}, \\
 R_{T_{12/11}}^L &= \{0\}, & T_{T_{12/11}}^L &= \{1\}, \\
 R_{N_{12/11}}^U &= \{2.0, 3.7, 11.2, 17.5, 40.0\}, & T_{N_{12/11}}^U &= \{1, 3, 5, 14, 22\}, \\
 R_{N_{12/11}}^L &= \{2.0, 0\}, & T_{N_{12/11}}^L &= \{1, 2\}
 \end{aligned}$$

となる。これより、記録データのもつ K-L 情報量は表 28 のように得られる。

表 28: 12 月 11 日の降水量データによる記録データの K-L 情報量 ( $n = 42$ )

	$I_X(\lambda)$	$I_M^L(n; \lambda)$	$I_{RT}^L(n; \lambda)$	$I_R^L(n; \lambda)$	$I_M^U(n; \lambda)$	$I_{RT}^U(n; \lambda)$	$I_R^U(n; \lambda)$
札幌 → 那覇	4.98	0.12	0.51	0.31	1.25	2.08	1.85
東京 → 那覇	3.70	0.09	0.38	0.25	1.46	2.08	1.80

表 28 では、全標本のもつ那覇に対する情報量は、札幌の方が東京より多く、下位の記録データのもつ情報量も大小関係は変わらない。しかし、上位の記録データのもつ情報量の一部では、東京の方が札幌より大きくなっている。これは、12 月は札幌は雪が降るので比較的安定して降水量が多い季節であるが、東京、那覇はほとんど降ることがない。このことにより、全標本による識別については、札幌と那覇に比べ東京と那覇の方がしづらく、下位の記録データについても東京と那覇はほとんどのデータが 0 であるため、その情報量は小さい。しかし、沖縄地方は 12 月でも大雨が降ることがあり、このことが、上位の記録データに関する札幌との識別を困難にし、東京の方が情報量が上回ることがある要因と考えることができる。

## 7 まとめ

本論では、記録データのもつ F 情報量、K-L 情報量について考察し、それぞれガンマ分布、指数分布についての適用例について述べた。一般に、記録データは未知母数  $\theta$  に対する十分統計量ではないので、その  $\theta$  に対する F 情報量は、元の観測値のもつ  $\theta$  に対する F 情報量よりも減少する。このことから、その情報量損失を考えることなどに意味はあるかもしれないが、推定論、検定論等の統計的推測理論へのこの F 情報量の応用は難しいように思われる。一方、記録データのもつ K-L 情報量は、未知母数  $\theta_1, \theta_2$  をもつ分布からそれぞれ得られた記録データの分布の識別を表す情報量としてとらえることができるので、有用性があると考えられる。実際に本論では、降水量データを用いてその有用性を確かめた。なお、K-L 情報量の極限として F 情報量が表せるため、K-L 情報量を考察する方がより一般的であると思われる。今後は、条件付分布等を用いた記録データの情報量を考察することも考えられる。また、本論では記録値のもつ F 情報量、K-L 情報量はシミュレーションにより求めたが、精度があまりよくないように感じられたので、これらについての改良を考察する余地があると思われる。

## 参考文献

- [AhAr01] Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2001). On the Fisher information in record values. *Metrika* **53**, 195–206.
- [AhAr03] Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2003). Comparing the Fisher information in record values and iid observations. *Statistics* **37**, 435–441.
- [ArnBN98] Arnord, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1998). *Records*. Wiley, New York.
- [AwR00] Awad, A. M. and Raqab, M. Z. (2000). Prediction intervals for the future record values from exponential distribution: comparative study. *J. Statist. Comput. Simul.*, **65**, 325–340.



- [HiAk02] Hida, E. and Akahira, M. (2002). On the construction of prediction intervals for record values. (In Japanese), *Proc. Sympos., Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ.*, **1273**, 165–177.
- [HoN03] Hofmann, G. and Nagaraja, H. N. (2003). Fisher information in record data. *Metrika* **57**, 177–193.
- [Ku68] Kullback, S. (1968). *Information Theory and Statistics*. Dover, New York.
- [YA03] Yamamoto, T. and Akahira, M. (2003). Informations contained in record data. 科研費シンポジウム「データ解析のための統計科学理論」予稿集, ⑬, 1–9.